Collection de la Direction
des Études et Recherches
d'Électricité de France

ESE
2

Les cours de l'Ecole Supérieure d'Electricité

Philippe Barret

Régimes transitoires des machines tournantes électriques

Préface de
Maurice Magnien

EYROLLES

COLLECTION DE LA DIRECTION DES ÉTUDES
ET RECHERCHES D'ÉLECTRICITÉ DE FRANCE

Régimes transitoires des machines tournantes électriques

Philippe Barret
Attaché technique à la Direction des Etudes et Recherches
d'Electricité de France
Professeur à l'Ecole Supérieure d'Electricité

Préface de

Maurice Magnien
Directeur des Etudes et Recherches
d'Electricité de France

2e édition
revue et corrigée

EDITIONS EYROLLES
61, Bd Saint-Germain Paris 5e
1987

ISSN 0399-4198

© 1987 DIRECTION DES ÉTUDES ET RECHERCHES D'ÉLECTRICITÉ DE FRANCE.

1re édition 1982

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'Article 40).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code Pénal.

PRÉFACE

Les activités de Philippe Barret à la Direction des Etudes et Recherches de l'E.D.F. ont été principalement consacrées aux machines électriques. D'abord affecté au « microréseau », modèle réduit du comportement des réseaux en régime transitoire, il a participé aux études de stabilité du réseau français et de divers réseaux étrangers, mais il s'est aussi plus particulièrement intéressé aux lois dimensionnelles des alternateurs, à l'analyse de leur comportement en régime variable, et aux particularités de leur fonctionnement en présence du réseau et en association avec leurs dispositifs de réglage de tension et de vitesse. Affecté depuis 1969 au Département Machines Electriques, il apporte l'appui de ses conseils aux équipes chargées d'analyser les contraintes subies par les groupes turbo-alternateurs du fait de leurs conditions de fonctionnement sur le réseau, en régime normal ou perturbé. Ces contraintes doivent être analysées avec d'autant plus de finesse et de précision que la puissance unitaire des groupes a crû de façon spectaculaire dans les années 1970, approchant maintenant les limites de faisabilité en technique classique. En outre, le turboalternateur, par la présence de son rotor massif, pose de difficiles problèmes de modélisation dont la solution a donné lieu à une thèse de Doctorat d'Etat soutenue par Philippe BARRET en 1976. Son activité s'exerce également dans de nombreuses instances nationales et internationales consacrées aux réseaux et aux machines tournantes tant génératrices que motrices. Enfin il assure depuis 1964 le Cours de Théorie des Machines à l'Ecole Supérieure d'Electricité.

C'est donc armé d'une solide expérience pédagogique et pratique qu'il s'est préoccupé de mettre au point le premier ouvrage publié en France consacré aux régimes transitoires des machines électriques tournantes. Un certain nombre de livres consacrés à ce sujet existent à l'étranger, écrits pour la plupart en anglais ; Concordia et à un moindre degré Adkins, sont les auteurs de plus forte renommée ; mais beaucoup de ces ouvrages ne sont consacrés qu'à des aspects spécifiques ; par ailleurs, dans le présent ouvrage, l'auteur a apporté un soin particulier à l'exposé et aux implications des hypothèses de départ, sur lesquelles sont fondés les modèles mathématiques proposés, et ceci en vue d'éviter le risque d'emploi abusif de ces modèles — lorsque les conditions particulières s'éloignent trop des hypothèses de départ — pouvant conduire à des résultats erronés ou contradictoires.

D'autre part, le besoin d'un ouvrage de base sur les méthodes d'étude des régimes transitoires des machines électriques est plus encore ressenti à l'heure actuelle, non seulement par l'ingénieur électricien, en raison des impératifs techniques et économiques conduisant à concevoir et exploiter les matériels au voisinage de leurs limites technologiques, mais bien souvent aussi par les spécialistes de l'électronique de puissance et de l'automatique, étant donné l'association de plus en plus étroite

de ces deux disciplines avec l'électrotechnique dans la conception, la mise au point et l'optimisation d'ensembles destinés à assurer des fonctions soit génératrices, soit motrices.

L'étude du comportement des machines en régime transitoire permet en effet de répondre à deux sortes de préoccupations : d'une part évaluer l'aptitude des machines à supporter certains régimes sévères et d'autre part estimer leurs fonctions de transfert en régime de petites ou grandes variations en vue d'ajuster au mieux les dispositifs de commande et de réglage qui leur sont associés.

En ce qui concerne les régimes « sévères » consistant pratiquement toujours en une variation brusque des conditions extérieures appliquées à la machine (tension, couple mécanique) ils peuvent soit être accidentels comme par exemple le court-circuit, soit faire partie de l'exploitation normale comme le démarrage de certains moteurs. Dans ce cas l'étude des régimes transitoires permet d'évaluer l'amplitude maximale et l'évolution au cours du temps de grandeurs telles que tensions, courants, couple électromagnétique, d'où la connaissance des contraintes de diverses natures : diélectriques, thermiques, mécaniques, conduisant à choisir les dispositions constructives adéquates, à prévoir éventuellement des modalités d'exploitation propres à limiter ces contraintes, à ajuster le réglage des protections.

Dans ces domaines d'application la précision requise pour les calculs n'est pas aussi grande que lors de l'évaluation du régime permanent : en ce qui concerne les perturbations de grande amplitude on sera amené de toutes façons à prévoir une marge de sécurité soit au niveau constructif, soit au niveau du réglage des protections ; en ce qui concerne l'étude des fonctions de transfert en vue du réglage on sait qu'il est important de connaître leur forme, c'est-à-dire le type de loi reliant entre elles les variations des différentes grandeurs, mais que la connaissance exacte des valeurs numériques est moins cruciale du fait que dans la fonction de transfert de l'ensemble c'est bien souvent la contribution du régulateur qui est prépondérante.

Pour cette raison un certain nombre d'hypothèses simplificatrices peuvent être adoptées dans l'élaboration des modèles mathématiques, permettant d'une part une mise en équations particulièrement simple et d'autre part de pousser assez loin, parfois jusqu'à son terme, la résolution de certains problèmes par voie purement analytique. Les principales de ces hypothèses sont celles de non-saturation des matériaux magnétiques et celle de distribution sinusoïdale des grandeurs électromagnétiques le long de l'entrefer.

L'ensemble de l'ouvrage a été traité dans le cadre de ces hypothèses. L'idée directrice a été de bien faire saisir le sens physique et les modalités particulières de la mise en équations, notamment en ce qui concerne la décomposition selon deux axes dans le cas des machines synchrones et asynchrones.

Au niveau des applications, on a cherché à fournir un éventail assez large d'exemples permettant de présenter les diverses mises en forme des équations, selon le type de régime transitoire considéré et le mode de traitement (analytique, analogique, digital) envisagé pour leur résolution.

L'ouvrage commence par un bref rappel de lois de la conversion électromécanique de l'énergie, conduisant aux expressions générales des grandeurs magnétiques, électriques et électromécaniques qui sont à la base de la mise en équations des machines.

Le reste de l'ouvrage est consacré aux trois types classiques de machines tournantes : à courant continu, synchrone et asynchrone.

La mise en équations des machines à courant continu est effectuée à partir de la « machine généralisée », comportant deux paires de balais par paires de pôles. Cette présentation a été adoptée surtout pour faciliter la compréhension du modèle mathématique établi par la suite pour les machines synchrones et asynchrones, qui présente avec celui de la machine à courant continu généralisée de très grandes analogies. La formulation des problèmes étant très simple, on n'a traité qu'un petit nombre d'exemples d'application — court-circuit, transmittance du moteur à courant continu.

La part prépondérante de l'ouvrage est consacrée aux machines synchrones ; on peut y voir principalement deux raisons :

— La grande variété de régimes transitoires dont on peut avoir à se préoccuper à leur propos et qui présente en outre l'intérêt pédagogique de permettre l'illustration d'un large éventail de méthodes d'études.

— L'incidence notable du comportement des alternateurs, du fait de leur taille et de leur rôle dans la production d'électricité, sur la qualité de la desserte d'énergie électrique et sur la bonne tenue de l'ensemble du matériel associé.

L'étude commence par l'établissement des équations de la machine ramenée à deux axes, selon la méthode imaginée par Blondel en régime permanent puis par Park en régime transitoire. On a introduit l'utilisation des valeurs réduites, d'un usage tout à fait général dans la littérature technique, et montré l'établissement des schémas équivalents.

Les exemples d'application sont traités dans les domaines suivants :

— Perturbations brusques, telles que courts-circuits symétriques ou dissymétriques, déclenchements, faux couplages. Ces exemples conduisent à l'évaluation des contraintes en régimes d'incidents ; certains d'entre eux sont en outre utilisés pour la détermination expérimentale des paramètres transitoires de la machine : réactances, constantes de temps.

— Fonctionnement asynchrone, intervenant lors du démarrage asynchrone des moteurs synchrones et lors des ruptures de synchronisme pouvant affecter les alternateurs en cas d'incident sur le réseau.

— Réglage de tension — l'exemple traité dans le texte a été choisi pour illustrer l'influence du régulateur de tension sur la stabilité statique d'un alternateur raccordé au réseau. Dans une note complémentaire à l'ouvrage on expose le principe d'un perfectionnement apporté à cette fonction du régulateur de tension, dans le cas de situations de réseau critiques du point de vue de la stabilité.

— Régimes de petites et grandes oscillations lorsque la machine synchrone est reliée à un réseau interconnecté, ce thème débouchant sur les importants problèmes de stabilité statique et transitoire des réseaux de transport.

Sur le plan des méthodes les exemples ci-dessus permettent d'illustrer l'utilisation du calcul opérationnel, l'utilisation du calcul en nombres complexes et des méthodes associées à l'analyse harmonique, la mise en forme d'équations différentielles non linéaires en vue de leur résolution par des moyens analogiques ou digitaux.

En ce qui concerne les machines asynchrones, les équations, formulées à l'aide de la décomposition selon deux axes, sont ensuite illustrées par quelques exemples : court-circuit, démarrage, fonction de transfert en cas d'alimentation en courant.

Pour conclure, disons que cet ouvrage a été réalisé dans un double souci : pédagogique, en vue de fournir aux étudiants une base solide de compréhension et des directives pour l'application, et pratique, en vue de fournir aux ingénieurs et chercheurs un outil de travail directement utilisable tout en restant suffisamment général. Puisse l'auteur avoir contribué à la réalisation de ces deux objectifs.

Maurice MAGNIEN.

Sommaire

Chapitre I. — Rappel sommaire des lois de la conversion électromécanique de l'énergie 3

1. Description du système 3
2. Relations entre flux et courants 4
3. Energie magnétique emmagasinée 4
4. Force électromotrice 4
5. Travail des forces mécaniques. Couple 5
6. Influence du nombre de paires de pôles 6
7. Equation du mouvement 7

Chapitre II. — Introduction à l'étude des régimes transitoires 9

1. Classification des problèmes concernant les régimes des machines tournantes, selon leur mode de résolution 9
2. Utilisation du calcul opérationnel 11
3. Petites perturbations 12

Chapitre III. — Mise en équations des machines à courant continu 15

1. Description, conventions de signes et hypothèses simplificatrices 15
2. Relations générales entre les flux et les courants 17
3. Calcul des forces électromotrices 18
4. Equations électriques 20
5. Couple et puissance 21
6. Cas particulier des machines à une paire de balais 22
7. Cas du fonctionnement en moteur 26
8. Cas des machines multipolaires 26
9. Fonctionnement en transformateur 27

Chapitre IV. — Régimes transitoires des machines à courant continu 29

1. Exemple de perturbation brusque : court-circuit aux bornes d'une génératrice shunt 29
2. Réglage de vitesse d'un moteur à courant continu 32
3. Autres types de régimes transitoires. Remarques sur les hypothèses simplificatrices 33

Chapitre V. — Mise en équations des machines synchrones 37

1. Description, hypothèses simplificatrices, conventions de signes 37
2. Equations électriques et magnétiques 41
3. Transformations de PARK, ou décomposition selon les deux axes 47
4. Equations électriques dans les axes d et q. Equations de PARK 53
5. Relations entre flux et courants (composantes d, q, o) 54
6. Puissance et couple 54
7. Cas d'une machine multipolaire 59
8. Cas particuliers de configurations ou de transformations 60

Chapitre VI. — Valeurs réduites. Régime permanent synchrone 65

1. Définition et utilisation des valeurs réduites dans les cas des machines synchrones 65
2. Régime permanent synchrone 73
3. Application à la mesure des réactances synchrones 79

Chapitre VII. — Régimes transitoires des machines synchrones à la vitesse de synchronisme 83

1. Introduction 83
2. Mise en forme opérationnelle des équations 83
3. Variation brusque de tension aux bornes. Application au court-circuit triphasé et au faux couplage 87
4. Exemple de variation brusque de courant : rétablissement de tension lors du déclenchement d'un court-circuit triphasé permanent 102
5. Ordre de grandeur des différentes réactances et constantes de temps 104
6. Simplification des calculs lorsqu'on néglige la présence des amortisseurs 105
7. Expressions des réactances et constantes de temps ; schémas équivalents. Saturation 106

Chapitre VIII. — Régimes permanents à vitesse non synchrone 117

1. Fonctionnement asynchrone des machines synchrones 117
2. Caractéristiques fréquentielles ; schémas équivalents en régime harmonique et asynchrone 124
3. Mesure des admittances harmoniques à l'arrêt 126

Chapitre IX. — Régimes déséquilibrés des machines synchrones 129

1. Influence d'une composante inverse de tension ou de courant 129
2. Régimes transitoires déséquilibrés 131
3. Valeur de la réactance inverse. Intérêt pratique 135

Chapitre X. — Régimes transitoires à vitesse non synchrone au cours desquels la vitesse ne peut pas être considérée comme constante 137

1. Introduction 137
2. Prise en compte du raccordement de la machine synchrone au réseau 139
3. Méthode d'étude des grandes perturbations 143
4. Méthode d'étude des petites perturbations 146
5. Méthode d'étude très simplifiée des régimes d'oscillations de petite ou grande amplitude, à partir d'un fonctionnement synchrone 153

Chapitre XI. — Machines asynchrones. Généralités. Mise en équations ; régime permanent asynchrone 167

1. Description, hypothèses simplificatrices, conventions de signes 167
2. Equations électriques et magnétiques 169
3. Puissance et couple 172
4. Cas d'une machine multipolaire 173
5. Choix du référentiel 174
6. Autres types d'enroulements 176
7. Régime permanent asynchrone, à rotor en court-circuit 177
8. Valeurs réduites 180

Chapitre XII. — Exemples de régimes transitoires des machines asynchrones 181

1. Etude de régimes transitoires en utilisant le référentiel lié au rotor 181
2. Etude de régimes transitoires en utilisant le référentiel lié au champ tournant 190
3. Expression condensée des équations, utilisant les nombres complexes 195
4. Conclusion 197

Note sur la régulation d'excitation 199

Bibliographie 211

CHAPITRE I

RAPPEL SOMMAIRE DES LOIS DE LA CONVERSION ÉLECTROMÉCANIQUE DE L'ÉNERGIE

1 DESCRIPTION DU SYSTÈME

Etant donné un ensemble de circuits C_1, C_2, ..., C_n (fig. 1.1), placés dans le vide ou dans un milieu comportant des substances magnétiques de perméabilité constante, les interactions magnétiques entre enroulements font intervenir les inductances propres $\mathfrak{L}_i$ et les inductances mutuelles $\mathcal{M}_{ij}$.

Si nous supposons ces circuits indéformables, les inductances propres et mutuelles sont fonction seulement de leur position soit par rapport aux matériaux de structure (le plus souvent ferromagnétiques) soit les uns par rapport aux autres.

Si nous supposons les circuits indéformables mais susceptibles de mouvement relatif, les $\mathfrak{L}$ et les $\mathcal{M}$ sont fonctions de la position relative des circuits. Par la suite nous nous limiterons au cas où le seul mouvement relatif est un mouvement de rotation, autour d'un axe commun, d'une partie des circuits par rapport aux autres ; le mouvement est alors dèfini à l'aide de la seule variable angulaire θ, caractérisant la position des enroulements mobiles par rapport aux enroulements fixes.

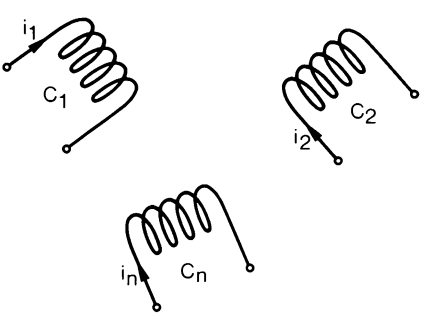


Fig. 1.1. — Circuits couplés.

2 RELATIONS ENTRE FLUX ET COURANTS

Si on appelle ψ_i le flux d'enroulement du circuit de rang i :

$$\psi_i = \mathfrak{L}_i\, i_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \mathfrak{M}_{ik}\, i_k \tag{1.1}$$

3 ÉNERGIE MAGNÉTIQUE EMMAGASINÉE

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \psi_i\, i_i \,. \tag{1.2}$$

4 FORCE ÉLECTROMOTRICE

Si le flux ψ_i traversant le circuit C_i varie, ce circuit est le siège d'une f.é.m. e_i

$$e_i = -\frac{d\psi_i}{dt} \,. \tag{1.3}$$

D'après (1.1) on voit que e_i est la somme de deux termes :

— Le terme correspondant aux dérivées des courants par rapports au temps ; on l'appelle *f.é.m. de transformation* (parce qu'il est seul à exister quand les circuits sont immobiles, comme dans un transformateur), on le note e_{it} et on écrit *conventionnellement* :

$$e_{it} = -\frac{\partial\psi_i}{\partial t} \,. \tag{1.4}$$

Le $\partial/\partial t$ signifiera pour nous qu'on considère seulement les variations des courants.

— Le terme correspondant aux dérivées des inductances $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ par rapport au temps. D'après les hypothèses précédentes la seule variation possible résulte d'une variation de l'angle θ donc on aura toujours :

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \frac{d\mathfrak{L}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \frac{d\mathfrak{M}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \,. \tag{1.5}$$

Le terme correspondant est appelé *f.é.m. de rotation* ; on le note e_{ir} et on écrit conventionnellement :

$$e_{ir} = -\frac{\partial\psi_i}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} \tag{1.6}$$

et d'autre part,

$$e_i = e_{it} + e_{ir} \,. \tag{1.7}$$

5 TRAVAIL DES FORCES MÉCANIQUES. COUPLE

Supposons que pendant un temps infiniment court dt le système des circuits couplés subisse une évolution caractérisée par des variations infiniment petites des courants et des inductances propres et mutuelles.

L'accroissement dW de l'énergie magnétique emmagasinée par le système s'écrit d'après (1.2) :

$$dW = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \psi_i \, di_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i_i \, d\psi_i \,. \tag{1.8}$$

Le travail électrique *fourni* au milieu extérieur $d\mathcal{E}_e$ s'écrit, en négligeant les résistances :

$$d\mathcal{E}_e = \sum_{i=1}^{n} e_i \, i_i \, dt$$

soit, en utilisant (1.3)

$$d\mathcal{E}_e = -\sum_{i=1}^{n} i_i \, d\psi_i \,. \tag{1.9}$$

Dans le même temps le système a *fourni* au milieu extérieur un travail mécanique $d\mathcal{E}_m$ et le principe de la conservation de l'énergie entraîne :

$$d\mathcal{E}_m + d\mathcal{E}_e + dW = 0 \tag{1.10}$$

d'où on tire $d\mathcal{E}_m$:

$$d\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (i_i \, d\psi_i - \psi_i \, di_i) \tag{1.11}$$

que l'on peut expliciter à l'aide de (1.1). Dans ce calcul tous les di_i s'éliminent (en particulier du fait de la propriété de réciprocité des mutuelles $\mathcal{M}_{ki} = \mathcal{M}_{ik}$) et il ne reste que les termes en $d\mathcal{L}$ et $d\mathcal{M}$

$$d\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i_i^2 \, d\mathcal{L}_i + \sum_{k \neq i} i_i \, i_k \, d\mathcal{M}_{ik} \,. \tag{1.12}$$

Le symbole $\sum_{k \neq i}$ signifie que l'on somme sur toutes les combinaisons des indices i et k (en particulier on ne fait pas de distinction, dans cette formule, entre $\mathcal{M}_{ik}$ et $\mathcal{M}_{ki}$).

Le couple électromagnétique est la dérivée du travail mécanique par rapport à l'angle.

$$\boxed{C_{em} = \frac{d\mathcal{E}_m}{d\theta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i_i^2 \frac{d\mathcal{L}_i}{d\theta} + \sum_{k \neq i} i_i \, i_k \frac{d\mathcal{M}_{ik}}{d\theta}} \tag{1.13}$$

Comme $\mathcal{C}_m$ est un travail fourni au milieu extérieur, C_{em} positif correspond à un *couple moteur.*

L'indice e signifie « électromagnétique ».

L'indice m signifie : convention de couple moteur positif.

Le remplacement du deuxième indice m par r correspond à la convention de couple résistant positif donc

$$C_{er} = - C_{em} .$$

La comparaison de (1.13) avec (1.1) et (1.2) conduit à l'expression très importante :

$$\boxed{C_{em} = \frac{\partial W}{\partial \theta}} . \tag{1.14}$$

Le couple électromagnétique est la dérivée de l'énergie magnétique par rapport à l'angle (en conservant aux courants leur valeur instantanée).

6 INFLUENCE DU NOMBRE DE PAIRES DE PÔLES

Pour ne pas confondre avec l'opérateur de LAPLACE p le nombre de pôles sera appelé p_1.

Dans une machine bipolaire la variable caractérisant la position angulaire est notée θ et la vitesse angulaire du rotor ω_r avec

$$\omega_r = \frac{d\theta}{dt} . \tag{1.15}$$

Dans une machine multipolaire, la variable angulaire sera notée Θ et la vitesse angulaire du rotor Ω_r, avec

$$\Omega_r = \frac{d\Theta}{dt} . \tag{1.16}$$

Une machine multipolaire se caractérise par le fait que les inductances $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sont toujours fonctions périodiques de l'angle Θ, mais la périodicité est divisée par p_1 par rapport à la machine bipolaire. C'est pourquoi il est commode d'introduire l'angle électrique θ tel que

$$\theta = p_1 \Theta \tag{1.17}$$

et la vitesse angulaire électrique ω_r telle que

$$\omega_r = p_1 \Omega_r . \tag{1.18}$$

Ce changement de variables intéresse essentiellement les f.é.m. de rotation (1.6) et le couple (1.13).

En bipolaire l'expression (1.6) peut s'écrire :

$$e_{ir} = - \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} \omega_r . \tag{1.19}$$

En multipolaire considérons les expressions (1.5) par exemple pour la mutuelle $\mathcal{M}$, fonction de Θ à périodicité $2\pi/p_1$

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = \frac{d\mathcal{M}}{d\Theta}\frac{d\Theta}{dt} = \frac{d\mathcal{M}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\mathcal{M}}{d\theta}\omega_r$$

et de même pour $\mathfrak{L}$ (normalement fonction de Θ à périodicité π/p_1) d'où il résulte que *les f.é.m. de rotation s'expriment de la même manière en multipolaire qu'en bipolaire* ((1.6) et (1.19)) à condition de considérer les angles et vitesses électriques.

En ce qui concerne le couple, il s'obtient également conformément à (1.13) mais en remplaçant Θ par θ et il vient en multipolaire :

$$C_{em} = p_1\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i_i^2\frac{d\mathfrak{L}_i}{d\theta} + \sum_{k\neq i} i_i\, i_k\frac{d\mathcal{M}_{ik}}{d\theta}\right). \tag{1.20}$$

L'expression du couple est donc multipliée par p_1 lorsque les inductances sont exprimées en fonction de l'angle électrique.

7 ÉQUATION DU MOUVEMENT

L'étude des régimes transitoires fait intervenir des variations non seulement des paramètres électriques (tensions, courants, f.é.m., flux), mais aussi des paramètres mécaniques (couples, vitesse).

Dans un souci d'unification, toutes les machines seront étudiées avec la convention « générateur ». Il est alors commode de considérer comme positif un couple mécanique moteur, qui sera noté C_m et un couple électromagnétique *résistant* qui sera noté C_{er} avec

$$C_{er} = -C_{em} \tag{1.21}$$

C_{em} étant donné par (1.13) en bipolaire et (1.20) en multipolaire.

En appelant J l'inertie des masses tournantes, accouplées sur le même arbre que la machine électrique étudiée, l'équation du mouvement s'écrit :

En bipolaire

$$C_m - C_{er} = J\frac{d\omega_r}{dt} \tag{1.22}$$

C_{er} étant donné par (1.13) et (1.21).

En multipolaire

$$C_m - C_{er} = J\frac{d\Omega_r}{dt} = \frac{J}{p_1}\cdot\frac{d\omega_r}{dt} \tag{1.23}$$

C_{er} étant donné par (1.20) et (1.21).

Conséquence pratique

Les équations électriques relatives à une machine multipolaire sont identiquement les mêmes que celles relatives à une machine bipolaire à la seule condition de

toujours considérer les angles et vitesses électriques, reliés à leur homologues mécaniques par (1.17) et (1.18).

Seules sont changées l'expression du couple (1.20) et l'équation du mouvement (1.23).

Par la suite nous effectuerons l'étude de toutes les machines en hypothèse bipolaire.

CHAPITRE II

INTRODUCTION A L'ÉTUDE DES RÉGIMES TRANSITOIRES

Nous verrons dans la suite de cet ouvrage que le comportement des machines tournantes en régime transitoire est traduit par un système d'équations dont les propriétés mathématiques ne dépendent pas du type de machine ; l'application en sera faite aux machines à courant continu, ainsi qu'aux machines synchrones et asynchrones. En conséquence les méthodes propres à l'étude des régimes transitoires peuvent être examinées d'une façon générale en fonction des divers types de régimes que l'on peut rencontrer.

1 CLASSIFICATION DES PROBLÈMES CONCERNANT LES RÉGIMES DES MACHINES TOURNANTES SELON LEUR MODE DE RÉSOLUTION

Nous aurons à considérer trois types d'équations :

— les équations « électriques », dont la forme générale est :

$$v_j = \frac{d\psi_j}{dt} + \omega_r \psi_k + R_j i_j \tag{2.1}$$

dans laquelle

v_j est une tension aux bornes

ψ_j, ψ_k sont des flux d'enroulement

ω_r est la vitesse de rotation (à une constante proportionnelle près)

R_j est une résistance

i_j est un courant.

En se reportant au chapitre I, on reconnaît dans le terme $d\psi_j/dt$ une f.é.m. de transformation et dans le terme $\omega_r \psi_k$ une f.é.m. de rotation :

— les équations « magnétiques », dont la forme générale est

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{L} \times \mathbf{i} \tag{2.2}$$

dans laquelle les termes de la matrice d'inductance $\mathbf{L}$ sont constants. Ces équations sont donc ici considérées comme linéaires ;

— les équations « mécaniques » : le couple électromagnétique de la forme

$$C_e = \psi_j i_k - \psi_k i_j , \tag{2.3}$$

l'équation du mouvement de la forme

$$C_m - C_e = J\frac{d\omega_r}{dt} \tag{2.4}$$

dans laquelle C_m est un couple mécanique, J est un moment d'inertie.

de la forme (2.1), deviennent linéaires à coefficients constants donc, combinées

Les problèmes relatifs aux régimes de fonctionnement des machines tournantes se divisent donc en deux grandes catégories, selon que l'on considère la vitesse de rotation comme constante ou variable.

En conséquence, si la vitesse ω_r est constante, d'une part l'équation du mouvement, de la forme (2.4), n'intervient pas et d'autre part les équations électriques, de la forme (2.1), deviennent linéaires à coefficients constants donc, combinées avec (2.2), résolubles par des méthodes simples.

Par contre, si la vitesse n'est pas constante, les équations différentielles ne sont plus linéaires, et sont pratiquement insolubles dans la majorité des cas.

Pour connaître malgré tout le comportement des machines lors des régimes transitoires, on utilise des auxiliaires de calcul, qui se répartissent en deux catégories :

1. Les modèles analogiques, systèmes physiques composés d'éléments combinés entre eux de façon que leur comportement obéisse aux mêmes questions différentielles que le système qu'on désire résoudre. Il existe deux sortes de modèles analogiques :

— le calculateur analogique ou analyseur différentiel, dans lequel les éléments du modèle ne sont pas nécessairement de même nature que les éléments correspondants du système réel.

— le modèle réduit, dans lequel les éléments du modèle sont de même nature que ceux du système réel. Dans le cas présent, le modèle réduit se composera de machines électriques dont les paramètres constructifs sont avec ceux des machines réelles dans des rapports fixes, de façon à obéir aux mêmes équations différentielles (à un facteur multiplicateur près de tous les coefficients numériques), mais ces modèles seront de dimensions assez petites pour que leur expérimentation soit facile.

2. Le calculateur digital qui résout les équations différentielles en les transformant en équations aux différences finies susceptibles de solution algébrique pendant un intervalle de temps assez court. Le calcul complet du régime transitoire consiste alors à répéter cette résolution pendant une succession de ces intervalles de temps.

Cependant, il existe une catégorie importante de régimes transitoires dont la solution est possible même en supposant la vitesse variable, c'est le domaine dit « des petites perturbations ». Si la perturbation est de faible amplitude on sait en effet qu'il est possible de linéariser les équations différentielles ; les petites perturbations sont d'un intérêt capital pour étudier la stabilité de fonctionnement, et les deux sortes de perturbations utilisées à cet effet sont l'échelon et la sollicitation sinusoïdale.

Nous pouvons donc dresser le tableau suivant des différents types de problèmes que nous pourrons rencontrer, ainsi que de la méthode d'étude qui leur convient :

Type de problème	Méthode d'étude
1. *Régimes à vitesse de rotation constante*	
1.1. Régime permanent de machine à courant continu	Nombres réels
1.2. Régime permanent de machines à courant alternatif	Nombres complexes
1.3. Régimes transitoires électriques	Calcul opérationnel
2. *Régimes à vitesse de rotation variable*	
2.1. Petites impulsions	Calcul opérationnel
2.2. Petites oscillations	Nombres complexes
2.3. Grandes perturbations	Auxiliaire de calcul

Nous allons maintenant donner quelques précisions d'ordre pratique sur certaines de ces méthodes, avant de passer à leurs applications particulières.

2 UTILISATION DU CALCUL OPÉRATIONNEL

Seuls peuvent bénéficier de cette méthode les régimes pour lesquels les équations différentielles sont linéaires à coefficients constants. Pour les régimes obéissant à cette condition, il est commode de s'affranchir des conditions initiales en ne considérant que les *variations* des différentes grandeurs à partir du régime établi initial.

En effet, par cette méthode, dite *méthode de superposition*, le système d'équations différentielles peut être directement transcrit en notations opérationnelles en remplaçant simplement l'opérateur de dérivation d/dt par la variable du Laplace p.

Nous allons rappeler le principe des deux méthodes sur un exemple très simple, l'extension à un système différentiel linéaire d'ordre quelconque ne présentant aucune difficulté.

Soit par exemple l'équation d'un circuit R, L

$$v = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{2.5}$$

2.1 Méthode générale

La transformée de LAPLACE de cette équation est :

$$v(p) = \mathrm{R}i(p) + p\mathrm{L}i(p) - \mathrm{L}i_0$$

i_0 étant la valeur initiale de courant.

On peut alors, par un calcul algébrique, déterminer $i(p)$ connaissant $v(p)$ ou l'inverse.

2.2 Méthode de superposition

Avec l'exemple ci-dessus, cette méthode consiste à écrire :

$$\begin{cases} v(t) = v_0(t) + \Delta v(t) \\ i(t) = i_0(t) + \Delta i(t) \end{cases} \tag{2.6}$$

$v_0(t)$ et $i_0(t)$ étant les lois temporelles caractérisant le régime permanent avant perturbation et $v(t)$ et $i(t)$ représentant les nouvelles lois à partir de $t = 0$.

En reportant dans l'équation (2.5) il est clair que Δv et Δi obéissent à la même équation :

$$\Delta v = \mathrm{R}\,\Delta i + \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}\Delta i}{\mathrm{d}t}$$

mais Δv et Δi sont de valeurs initiales nulles donc la transformée de LAPLACE s'écrit :

$$\Delta v(p) = \mathrm{R}\,\Delta i(p) + p\mathrm{L}\,\Delta i(p)$$

en remplaçant tout simplement $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ par p, sans adjonction de termes supplémentaires.

Cette méthode n'est pas toujours avantageuse.

Il faut en effet appliquer la transformation de LAPLACE à l'une ou l'autre des équations (2.6), celle qui caractérise la perturbation appliquée à l'instant $t = 0$. Supposons par exemple que cette perturbation soit une modification de la loi $v(t)$. La nouvelle loi aura pour transformée $v(p)$, et $\Delta v(p)$ sera obtenue par l'équation :

$$v(p) = v_0(p) + \Delta v(p)\,.$$

Le calcul ne sera donc simplifié que si $v_0(p)$ est particulièrement simple, en pratique le seul cas intéressant est

$$v_0(t) = \mathrm{V}_0 = \text{constante}\,, \quad \text{d'où} \quad v_0(p) = \frac{\mathrm{V}_0}{p}\,.$$

La méthode de superposition n'est pratiquement intéressante que si le régime préexistant est un régime à grandeurs invariantes au cours du temps.

Par contre, s'il en est ainsi, cette méthode permet de pouser assez loin, sous forme algébrique, des calculs d'une grande généralité dont le résultat final s'appliquera à une très grande variété de perturbations. Nous verrons que son emploi est particulièrement indiqué dans le cas des machines synchrones.

3 PETITES PERTURBATIONS

La méthode d'étude s'applique aussi bien à un système linéaire que non linéaire.

Considérons par exemple l'équation (2.1), en supposant que le régime initial est permanent, mais que toutes les grandeurs sont susceptibles de subir de petites variations.

La différenciation de ce système donne :

$$\Delta v_j = - \frac{\mathrm{d}\Delta\psi_j}{\mathrm{d}t} - \psi_{k0}\,\Delta\omega_r - \omega_{r0}\,\Delta\psi_k - \mathrm{R}_j\,\Delta i_j$$

c'est-à-dire une équation différentielle linéaire.

3.1 Petites impulsions

Les valeurs initiales des Δ étant toutes nulles, la transformée de LAPLACE s'écrit simplement en remplaçant l'opérateur d/dt par p :

$$\Delta v_j(p) = - p\,\Delta\psi_j(p) - \psi_{k0}\,\Delta\omega_r(p) - \omega_{r0}\,\Delta\psi_k(p) - \mathrm{R}_j\,\Delta i_j(p)\,.$$

Si par exemple la perturbation est une variation en échelon de v_j, d'amplitude $\Delta \mathrm{V}_j$, il suffit de remplacer $\Delta v_j(p)$ par $\Delta v_j/p$.

L'ensemble du système peut alors être résolu algébriquement.

3.2 Petites oscillations

Si la perturbation appliquée est une variation sinusoïdale de faible amplitude et de pulsation Ω, la linéarité du système différencié montre que dans un régime établi tous les Δ seront également fonctions sinusoïdales de pulsation Ω.

La solution est alors obtenue en remplaçant toutes les variables par les nombres complexes associés et l'opérateur d/dt par jΩ.

L'équation que nous avons prise comme exemple s'écrira alors :

$$\Delta \mathbf{V}_j = - \mathrm{j}\Omega\,\Delta\boldsymbol{\Psi}_j - \psi_{k0}\,\Delta\boldsymbol{\omega}_r - \omega_{r0}\,\Delta\boldsymbol{\Psi}_k - \mathrm{R}_j\,\Delta\mathbf{I}_j\,.$$

La méthode des petites perturbations s'applique particulièrement à l'étude des oscillations forcées — et par exemple à la détermination d'éventuelles résonances et à l'étude des problèmes de réglage et de stabilité.

CHAPITRE III

MISE EN ÉQUATIONS DES MACHINES A COURANT CONTINU

1 DESCRIPTION, CONVENTIONS DE SIGNES ET HYPOTHÈSES SIMPLIFICATRICES

1.1 Description

La machine dont nous allons établir les équations de fonctionnement s'appelle *machine à courant continu généralisée.* Elle est schématisée figure 3.1 (en version bipolaire) et comporte :

— Un induit identique à l'induit d'une machine à courant continu bipolaire, tournant à la vitesse angulaire $d\theta/dt = \omega_r$ comptée positivement dans le sens horaire.

— Deux paires de pôles inducteurs. Leurs axes magnétiques sont perpendiculaires, l'axe direct O*d* pris comme origine des angles, et l'axe en quadrature O*q*, en arrière de 90° par rapport à lui dans le sens trigonométrique. Les pôles inducteurs d'axe direct portent un enroulement d'indice *f*, parcouru par un courant i_f ; ceux d'axe en quadrature portent un enroulement d'indice *g*, parcouru par un courant i_g. Les enroulements sont conventionnellement représentés seulement du côté positif de l'axe correspondant.

L'enroulement d'induit est raccordé au milieu extérieur par des contacts glissants dont l'emplacement correspond à celui des balais. Nous considérons deux paires de balais diamétralement opposés, dont les emplacements normaux sont le long des axes O*d* et O*q* respectivement, mais que, pour une meilleure compréhension, nous supposons pour commencer occuper des positions angulaires θ_1 et θ_2 quelconques.

Les balais situés au droit de l'angle θ_1 sont appelés A_1 et B_1. Entre ces deux balais, l'induit se comporte comme une bobine d'axe magnétique A_1B_1, parcourue par un courant i_1.

Les balais situés au droit de l'angle θ_2 sont appelés A_2 et B_2. Entre ces deux balais, l'induit se comporte comme une bobine d'axe magnétique A_2B_2, parcourue par un courant i_2.

Notons que les machines à plus de deux balais (en version bipolaire) ne sont pratiquement plus utilisées à l'heure actuelle. Nous avons cependant choisi de développer la mise en équations avec la version « généralisée », quitte à simplifier

par la suite en supprimant deux balais, du fait principalement que le modèle ainsi obtenu facilitera plus tard l'interprétation des équations des machines synchrones et asynchrones.

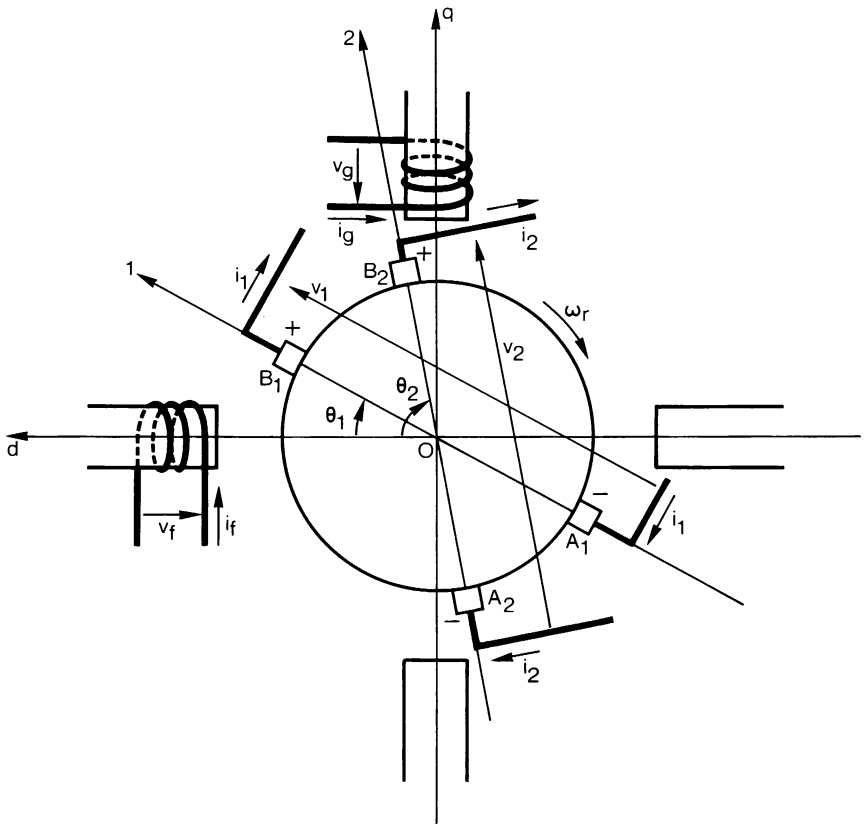


Fig. 3.1. — Machine à courant continu généralisée ; balais dans une position quelconque.

1.2 Conventions de signes

a) Un courant positif crée à travers son propre enroulement un flux positif.

b) Une f.é.m. positive fait circuler un courant positif.

De ces deux conventions résulte le signe — dans la relation

$$e = -\frac{d\psi}{dt}.$$

c) En ce qui concerne la tension aux bornes des enroulements, nous adopterons deux conventions distinctes :

— Les inducteurs sont considérés comme *récepteurs*. La loi d'OHM pour ces enroulements s'écrit donc (voir fig. 3.1) ;

$$\begin{cases} v_f = R_f\, i_f - e_f \\ v_g = R_g\, i_g - e_g \end{cases} \tag{3.1}$$

en appelant R_f et R_g la résistance des enroulements correspondants.

— L'induit est considéré comme générateur. La loi d'OHM s'écrit donc (voir fig. 3.1) ;

$$(3.2) \qquad \begin{cases} v_1 = e_1 - \mathrm{R}i_1 \\ v_2 = e_2 - \mathrm{R}i_2 \end{cases}$$

en appelant R la résistance de l'induit mesurée entre deux points diamétralement opposés.

1.3 Hypothèses simplificatrices

— On suppose que le circuit magnétique n'est pas saturé, condition nécessaire pour considérer les flux comme fonctions linéaires des courants.

— On suppose le circuit magnétique parfaitement feuilleté, ce qui permet de considérer que seuls les enroulements (inducteurs et induit) sont parcourus par des courants et en outre on suppose que la densité de courant peut être considérée comme uniforme dans la section des conducteurs élémentaires (absence d'effet pelliculaire).

— On suppose que les inductances mutuelles entre deux enroulements sont fonction sinusoïdale de l'angle que font leurs axes magnétiques.

Soient par exemple deux enroulements d'indices i, j ; le flux ψ_{ij} à travers l'enroulement i et dû au courant i_j s'écrit alors :

$$\psi_{ij} = \mathcal{M}_{ij}\, i_j = \mathrm{M}_{ij}\, i_j \cos(\theta_i - \theta_j)$$

M_{ij} étant une constante.

Remarquons que, si les enroulements i et j sont confondus, l'expression ci-dessus est alors relative à l'inductance propre $\mathcal{L}_i$. Il en résulte deux conséquences importantes :

— L'hypothèse de variation sinusoïdale des mutuelles entraîne que les inductances propres $\mathcal{L}_i$ sont des constantes L_i indépendantes de l'angle.

— Les coefficients M_{ij} sont tous positifs en vertu de la convention de signe *a*).

2 RELATIONS GÉNÉRALES ENTRE LES FLUX ET LES COURANTS (θ_1 et θ_2 quelconques)

Les relations entre les flux et les courants peuvent s'écrire sous la forme matricielle tout à fait générale :

$$(3.3) \qquad \begin{vmatrix} \psi_f \\ \psi_g \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_f & \mathcal{M}_{fg} & \mathcal{M}_{f1} & \mathcal{M}_{f2} \\ \mathcal{M}_{gf} & \mathcal{L}_g & \mathcal{M}_{g1} & \mathcal{M}_{g2} \\ \mathcal{M}_{1f} & \mathcal{M}_{1g} & \mathcal{L}_1 & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{2f} & \mathcal{M}_{2g} & \mathcal{M}_{21} & \mathcal{L}_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_f \\ i_g \\ i_1 \\ i_2 \end{vmatrix} .$$

Compte tenu de nos hypothèses :

— Les inductances propres sont toutes des constantes : $\mathcal{L}_f = \mathrm{L}_f$, $\mathcal{L}_g = \mathrm{L}_g$, inductances propres des enroulements inducteurs ; $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathrm{L}$, inductance propre de l'induit.

— L'inductance mutuelle $\mathcal{M}_{fg}$ est nulle et de dérivée nulle.

— L'inductance mutuelle entre f et un enroulement d'induit est fonction sinusoïdale de l'angle de ces enroulements, de valeur maximale M_{fd} obtenue lorsque l'axe O1 (ou O2) est confondu avec Od.

— L'inductance mutuelle entre g et un enroulement d'induit est fonction sinusoïdale de l'angle de ces deux enroulements, de valeur maximale M_{gq} obtenue lorsque l'axe O1 (ou O2) est confondu avec Oq (si les enroulements et les pôles f et g étaient identiques, alors en plus on aurait $M_{fd} = M_{gq}$).

— L'inductance mutuelle entre 1 et 2 est également fonction sinusoïdale de l'angle entre 1 et 2, sa valeur maximale est L, car si 1 et 2 sont confondus, l'inductance mutuelle se confond avec l'inductance propre de l'induit.

Pour une meilleure compréhension de la suite, on a appelé θ_f et θ_g les angles des axes magnétiques des enroulements f et g, bien que ces angles soient évidemment égaux à 0 et $\pi/2$ respectivement.

Il vient donc :

$$(3.4)\qquad \begin{vmatrix} \psi_f \\ \psi_g \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_f & 0 & M_{fd}\cos(\theta_f-\theta_1) & M_{fd}\cos(\theta_f-\theta_2) \\ 0 & L_g & M_{gq}\cos(\theta_g-\theta_1) & M_{gq}\cos(\theta_g-\theta_2) \\ M_{fd}\cos(\theta_1-\theta_f) & M_{gq}\cos(\theta_1-\theta_g) & L & L\cos(\theta_1-\theta_2) \\ M_{fd}\cos(\theta_2-\theta_f) & M_{gq}\cos(\theta_2-\theta_g) & L\cos(\theta_2-\theta_1) & L \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_f \\ i_g \\ i_1 \\ i_2 \end{vmatrix}$$

3 CALCUL DES FORCES ÉLECTROMOTRICES

3.1 Etude générale des f.é.m. de rotation

Leur calcul est un peu délicat dans le cas des machines à collecteur, ces f.é.m. sont relatives aux dérivées d'inductances par rapport à l'angle. Dans le système d'équations (3.4) on a pris soin de ranger correctement les angles intervenant dans la fonction cosinus. Le premier angle est toujours celui de l'enroulement qui reçoit le flux, le deuxième celui de l'enroulement qui engendre le flux.

Le flux engendré par les inducteurs est toujours immobile, mais, à cause du collecteur et des balais, le flux engendré par les enroulements d'induit est lui aussi immobile, bien que créé par des enroulements mobiles. Donc tous les deuxièmes angles de (3.4) doivent être considérés comme invariables. Par contre les conducteurs de l'induit sont mobiles, il y a donc bien lieu de dériver par rapport aux premiers angles θ_1 ou θ_2 les deux dernières lignes de (3.4).

Appliquant donc l'expression générale (1.6) de la f.é.m. de rotation :

$$e_{ir} = -\frac{\partial \psi_i}{\partial \theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \left(\text{avec } \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega_r\right),$$

il vient :

$$(3.5)\qquad \begin{vmatrix} e_{fr} \\ e_{gr} \\ e_{1r} \\ e_{2r} \end{vmatrix} = \omega_r \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{fd}\sin(\theta_1-\theta_f) & M_{gq}\sin(\theta_1-\theta_g) & 0 & L\sin(\theta_1-\theta_2) \\ M_{fd}\sin(\theta_2-\theta_f) & M_{gq}\sin(\theta_2-\theta_g) & L\sin(\theta_2-\theta_1) & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_f \\ i_g \\ i_1 \\ i_2 \end{vmatrix}$$

Cette difficulté étant levée, on peut maintenant placer les deux paires de balai de l'induit dans leur position normale (fig. 3.2).

Sur cette figure on a simulé en trait interrompu les enroulements d'induit d et q pour bien montrer la direction de leurs axes magnétiques.

A_1 et B_1 viennent dans la position A_dB_d, avec $\theta_1 = 0$; dans cette position on remplacera partout l'indice 1 par d (soit i_d, ψ_d, e_d, v_d).

A_2 et B_2 viennent dans la position A_qB_q, avec $\theta_2 = \pi/2$; dans cette position on remplace partout l'indice 2 par q (soit i_q, ψ_q, e_q, v_q).

Enfin rappelons que $\theta_f = 0$ et $\theta_q = \pi/2$.

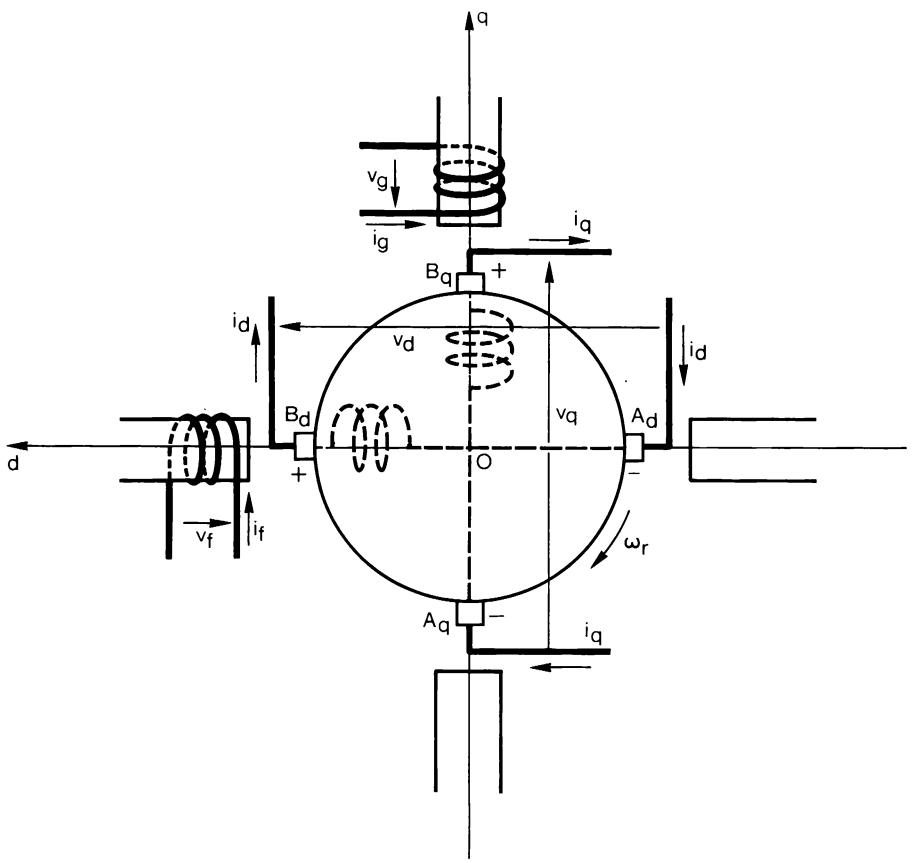


Fig. 3.2. — Machine à courant continu généralisée ; balais alignés avec les axes d et q.

3.2 Relations entre flux et courants

Le système (3.4) devient alors :

$$\begin{vmatrix} \psi_f \\ \psi_g \\ \psi_d \\ \psi_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_f & 0 & M_{fd} & 0 \\ 0 & L_g & 0 & M_{gq} \\ M_{fd} & 0 & L & 0 \\ 0 & M_{gq} & 0 & L \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_f \\ i_g \\ i_d \\ i_q \end{vmatrix}.$$

Il est facile de voir que cette matrice d'ordre 4 se décompose en deux matrices d'ordre 2, l'une caractérisant le couplage des enroulements d'axe *d*, l'autre caractérisant le couplage d'axe *q* :

$$\begin{vmatrix} \psi_f \\ \psi_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_f & M_{fd} \\ M_{fd} & L \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_f \\ i_d \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

$$\begin{vmatrix} \psi_g \\ \psi_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_g & M_{gq} \\ M_{gq} & L \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_g \\ i_q \end{vmatrix} \tag{3.7}$$

3.3 f.é.m. de rotation

Le système (3.5) devient :

$$\begin{cases} e_{fr} = 0 \\ e_{gr} = 0 \\ e_{dr} = -\omega_r(M_{gq}\, i_g + L i_q) = -\psi_q\, \omega_r \\ e_{qr} = \omega_r(M_{fd}\, i_f + L i_d) = \psi_d\, \omega_r . \end{cases} \tag{3.8}$$

3.4 f.é.m. de transformation

Elles correspondent aux dérivées partielles des flux par rapport aux courants. La variable angulaire ayant disparu des équations (3.6) et (3.7), il suffit d'écrire :

$$\begin{cases} e_{ft} = -\dfrac{d\psi_f}{dt} \\ e_{gt} = -\dfrac{d\psi_g}{dt} \\ e_{dt} = -\dfrac{d\psi_d}{dt} \\ e_{qt} = -\dfrac{d\psi_q}{dt} . \end{cases} \tag{3.9}$$

4 ÉQUATIONS ÉLECTRIQUES

Explicitons les équations (3.1) et (3.2), en substituant les indices *d* et *q* à 1 et 2, et en considérant que chaque f.é.m. est la somme de la f.é.m. de rotation et de la f.é.m. de transformation. Il vient, utilisant (3.8) et (3.9) :

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{d\psi_f}{dt} + R_f\, i_f \\ v_g &= \frac{d\psi_g}{dt} + R_g\, i_g \\ v_d &= -\frac{d\psi_d}{dt} - \psi_q\, \omega_r - R i_d \\ v_q &= -\frac{d\psi_q}{dt} + \psi_d\, \omega_r - R i_q \end{aligned} \tag{3.10}$$

Le comportement électrique de la machine à courant continu généralisée, dans le cadre de nos hypothèses, est entièrement défini par les équations (3.6), (3.7) et (3.10).

5 COUPLE ET PUISSANCE

Utilisons l'expression générale (1.13), changée de signe pour obtenir un couple électromagnétique résistant (et abandonnons l'indice r puisque nous conserverons cette convention pour le couple) :

$$C_e = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i_i^2 \frac{d\mathfrak{L}_i}{d\theta} - \sum_{k\neq i} i_i\, i_k \frac{d\mathcal{M}_{ik}}{d\theta}.$$

Les inductances propres et mutuelles sont celles de la matrice (3.3), et leur loi en fonction de l'angle est explicitée en (3.4), lorsqu'on n'a pas encore donné à θ_1 et θ_2 leurs valeurs particulières.

Les quatre inductances propres sont de dérivée nulle par rapport à l'angle. Il y a six mutuelles distinctes :

— la mutuelle $\mathcal{M}_{fg}$, nulle, donne une contribution nulle au couple car elle est aussi de dérivée nulle.

— Les mutuelles $L\cos(\theta_2 - \theta_1)$ et $L\cos(\theta_1 - \theta_2)$ donnent une contribution nulle car leurs dérivées sont égales et de signe contraire selon qu'on considère l'action de 1 sur 2 ou l'action de 2 sur 1.

— Les quatre autres mutuelles apparaissent dans la partie inférieure gauche de la matrice (3.4) d'où le couple :

$$C_e = M_{fd}\sin(\theta_1 - \theta_f)\, i_f\, i_1 + M_{gq}\sin(\theta_1 - \theta_g)\, i_g\, i_1 + M_{fd}\sin(\theta_2 - \theta_f)\, i_f\, i_2 + M_{gq}\sin(\theta_2 - \theta_g)\, i_g\, i_2$$

soit en donnant maintenant aux angles leurs valeurs particulières correspondant à la figure 3.2 :

$$C_e = -M_{gq}\, i_g\, i_d + M_{fd}\, i_f\, i_q.$$

En utilisant (3.6) et (3.7) on peut aussi écrire plus généralement :

$$\boxed{C_e = \psi_d\, i_q - \psi_q\, i_d} \qquad (3.11)$$

Rappelons que le signe correspond à un couple électromagnétique résistant. La puissance électrique sortant de l'induit s'écrit, à partir de (3.10) :

$$P_e = v_d\, i_d + v_q\, i_q = -\left(i_d \frac{d\psi_d}{dt} + i_q \frac{d\psi_q}{dt}\right) + \omega_r(\psi_d\, i_q - \psi_q\, i_d) - R(i_d^2 + i_q^2). \qquad (3.12)$$

Elle se compose de 3 termes :

— le 1er terme correspond à la variation d'énergie magnétique emmagasinée ; il n'existe que si les courants sont variables.

— le 2e terme correspond à la puissance mécanique (il est égal à $C_e\,\omega_r$).
— le 3e terme correspond aux pertes Joule.

En comparant (3.11) avec (3.8), on constate que la puissance mécanique $C_e\,\omega_r$ associée au couple correspond à la puissance électrique associée aux f.é.m. de rotation exclusivement.

Un intérêt particulier de la mise en équations qui vient d'être faite est qu'on peut obtenir un ensemble d'équations tout à fait similaire pour toutes les machines tournantes hétéropolaires. Nous le constaterons en particulier dans le cas des machines synchrones et asynchrones.

Pour la suite de l'étude des machines à courant continu, on considèrera principalement le cas d'une seule paire de balais d'axe q, les machines à plus de deux balais n'étant pratiquement plus utilisées.

6 CAS PARTICULIER DES MACHINES A UNE PAIRE DE BALAIS

6.1 Propriétés générales

Il suffit, pour décrire l'ensemble des comportements de la machine à courant continu généralisée, des seules équations encadrées ci-avant, à savoir (3.6), (3.7), (3.10) et (3.11) (en ajoutant, bien sûr, l'équation du mouvement (1.22)).

Si on supprime les deux balais d'axe d, on supprime v_d et i_d (mais pas ψ_d).

Donc les équations (3.6) se simplifient, dans (3.10) l'équation relative à v_d disparaît et (3.11) devient :

$$C_e = \psi_d\, i_q\,.$$

Au regard de cette simplification, on rencontrera parfois un accroissement de complexité dû à la présence de plusieurs enroulements distincts sur les pôles inducteurs, mais leur prise en compte est extrêmement simple ; par exemple si les pôles d'axe direct comportent deux enroulements d'indices f et f', le système (3.6) s'accroît d'un ordre (intervention de $i_{f'}$ et $\psi_{f'}$) et dans (3.10) s'ajoute une équation $v_{f'}$ du même type que v_f, le reste étant inchangé.

6.2 Machine à courant continu à excitation séparée

6.2.1 *Machine non compensée*

Une telle machine possède un seul inducteur dans l'axe direct (indice f) et une seule paire de balais dans l'axe en quadrature (indice q) (fig. 3.3).

Les équations (3.6) et (3.7) se réduisent à :

$$\psi_f = L_f\, i_f$$
$$\psi_d = M_{fd}\, i_f$$
$$\psi_q = L i_q$$

que l'on porte dans (3.10) en supprimant v_g et v_d :

$$\text{(3.13)} \qquad \begin{cases} v_f = R_f\, i_f + L_f \dfrac{di_f}{dt} \\ \\ v_q = M_{fd}\, \omega_r\, i_f - R i_q - L \dfrac{di_q}{dt} \end{cases}$$

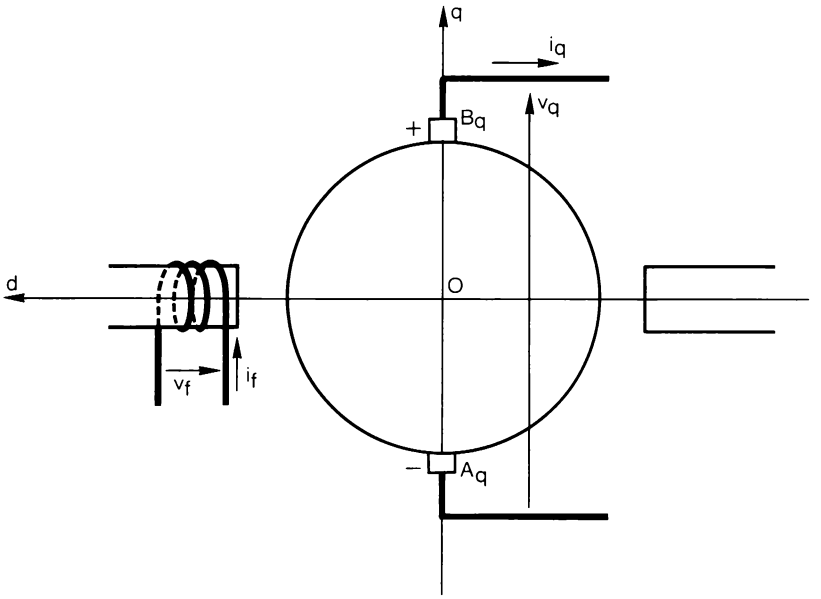


Fig. 3.3. — Machine à courant continu non compensée.

et (3.11) devient :

$$C_e = M_{fd}\, i_f\, i_q \,. \tag{3.14}$$

En régime permanent ($d/dt = 0$, lettres majuscules) on retrouve, aux notations près, les équations classiques de la machine à courant continu :

$$V_q = M_{fd}\, \omega_r\, I_f - R I_q$$
$$C_e = \Psi_d\, I_q \,.$$

6.2.2 *Machine compensée*

Nous allons considérer seulement l'enroulement de compensation de la réaction transversale d'induit, les pôles de commutation n'ayant qu'une influence locale.

On sait que cet enroulement est solidaire de l'armature fixe, et que son axe magnétique doit être confondu avec celui de l'induit ; il peut donc être représenté par l'enroulement g figure 3.4, connecté en série avec l'enroulement q de façon que leurs flux s'opposent. Les équations s'obtiennent en deux temps :

Tout d'abord on se contente de retranscrire les équations (3.6), (3.7) et (3.10), en supprimant simplement i_d et v_d, ensuite on écrit les relations résultant des connexions de la figure :

$i_g = - i_q$ (signe − pour que les flux s'opposent)

$v = v_q + v_g$ (v = tension aux bornes) :

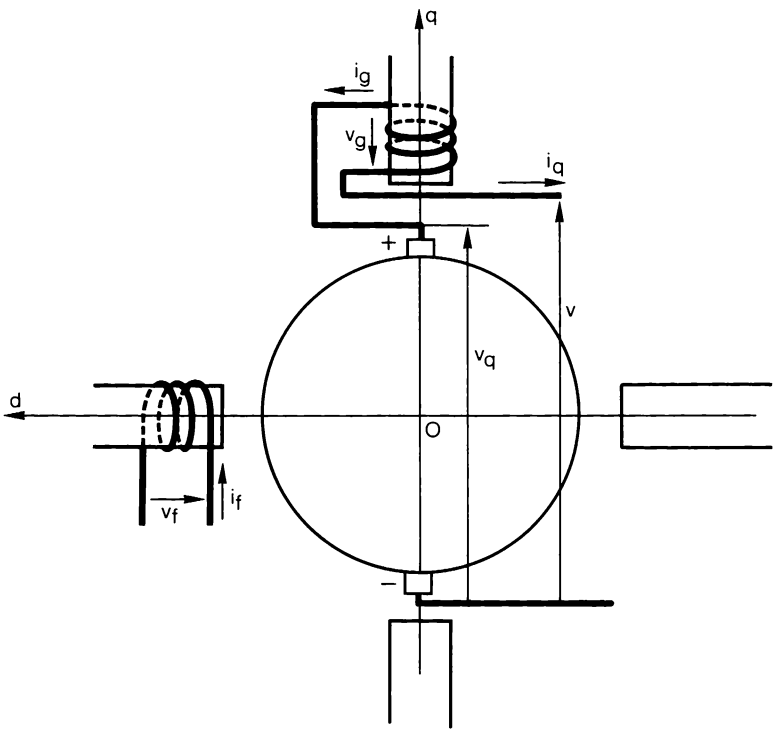


Fig. 3.4. — Machine à courant continu compensée.

Il vient, en éliminant les flux :

$$(3.15)\qquad \begin{cases} v_f = R_f\, i_f + L_f \dfrac{di_f}{dt} \\ v = M_{fd}\,\omega_r\, i_f - (R + R_g)\, i_q - (L_g + L - 2\,M_{gq}) \dfrac{di_q}{dt}. \end{cases}$$

L'expression du couple reste (3.14).

Ces équations sont rigoureusement de même forme que le système (3.13) ; les seules différences sont un accroissement de la résistance d'induit, et une *diminution de l'inductance propre de l'induit*. Si la compensation est totale, c'est-à-dire si le nombre de spires effectives de l'induit et de l'enroulement g est le même, cette diminution peut être très importante au point qu'il sera possible de négliger le terme $(L_g + L - 2\,M_{gq})$ dans un certain nombre de cas.

En conséquence *nous conserverons par la suite aux équations des génératrices et moteurs la forme* (3.13), mais nous utiliserons, pour simplifier certains calculs, le fait que dans ces équations l'inductance effective L peut être très faible du fait de la compensation.

6.3 Machine à courant continu à excitation shunt

Dans les équations (3.13), il suffit de faire $v_f = v_q$, et d'autre part le courant utilisable i est tel que $i = i_q - i_f$.

Même procédé au cas où la machine est compensée.

6.4 Influence d'un enroulement d'excitation série

Considérons figure 3.5 la machine de la figure 3.3 comportant en série avec l'induit des spires bobinées sur l'inducteur d'axe direct, de sens tel qu'un courant i_q positif dans cet enroulement y engendre un flux positif.

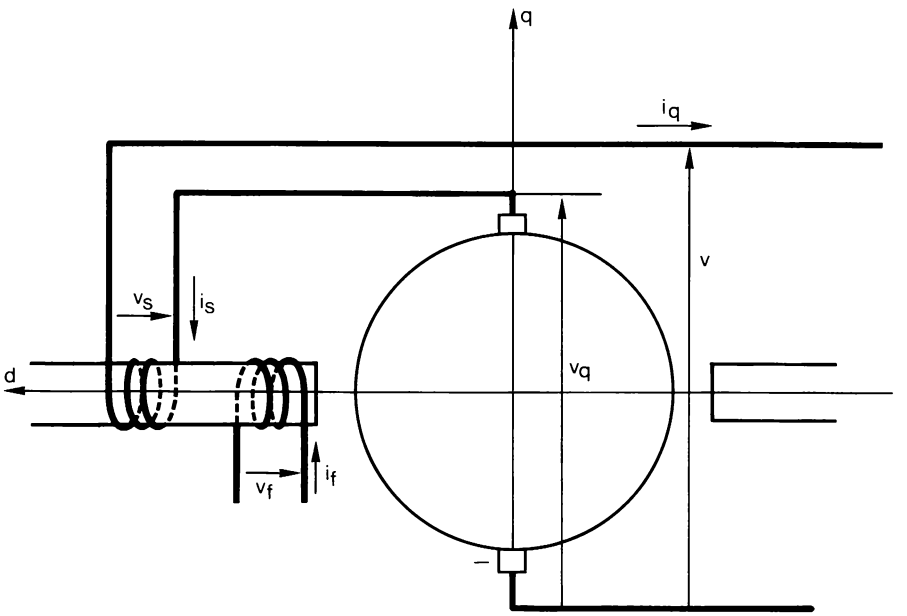


Fig. 3.5. — Machine à courant continu avec enroulement d'excitation série.

L'enroulement série est caractérisé par l'indice s (v_s, i_s, ψ_s, convention récepteur comme pour f), par les inductances propre L_s, mutuelles M_{fs} et M_{sd}, toutes positives, et par la résistance R_s.

Il est facile d'établir directement les relations magnétiques, par simple observation de la figure 3.5.

Dans l'axe direct, les enroulements f et s sont couplés magnétiquement entre eux et avec l'enroulement d'induit d'axe direct, dont nous devons toujours condidérer le flux ψ_d bien qu'il ne soit pas parcouru par un courant i_d

$$\begin{vmatrix} \psi_f \\ \psi_s \\ \psi_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_f & M_{fs} \\ M_{fs} & L_s \\ M_{fd} & M_{sd} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_f \\ i_s \end{vmatrix}.$$

Dans l'axe en quadrature seul existe l'enroulement d'induit, on a donc simplement :

$$\psi_q = L i_q .$$

Dans les équations (3.10) on doit :

— supprimer les équations relatives à v_g et v_d

— ajouter l'équation

$$v_s = \frac{d\psi_s}{dt} + R_s\, i_s$$

— introduire les relations traduisant les connexions de la figure 3.5

$$i_s = i_q \qquad \text{(signe + pour que les flux s'ajoutent)}$$

$$v = v_q - v_s \qquad (v = \text{tension aux bornes}).$$

Il vient, en éliminant les flux :

$$(3.16)\quad \begin{cases} v_f = R_f\, i_f + L_f \dfrac{di_f}{dt} + M_{fs} \dfrac{di_q}{dt} \\ v = M_{fd}\ \omega_r\, i_f - M_{fs} \dfrac{di_f}{dt} + (-R - R_s + M_{sd}\, \omega_r)\, i_q - (L + L_s) \dfrac{di_q}{dt} \\ C_e = \psi_d\, i_q = (M_{fd}\, i_f + M_{sd}\, i_q)\, i_q\,. \end{cases}$$

En se limitant au régime permanent ($d/dt = 0$), on retrouve dans la deuxième équation un résultat connu : un enroulement d'excitation série additif a pour effet de réduire la chute de tension interne de la génératrice. La 3e équation montre l'influence de l'enroulement série sur le couple.

En régime variable, on observe une interaction de type transformateur entre les enroulements f et s par l'intermédiaire de l'inductance mutuelle M_{fs} : une telle interaction complique l'étude des régimes transitoires, et peut s'avérer nuisible dans certains problèmes de réglage.

On pourrait imaginer bien d'autres arrangements d'enroulements inducteurs, les exemples ci-dessus fournissent la méthode pour les traiter sans difficulté.

7 CAS DU FONCTIONNEMENT EN MOTEUR

Lors de l'étude du fonctionnement en moteur nous ne changerons pas les conventions de signes et conserverons donc les équations ci-dessus. Il faudra alors considérer le couple C_e, le courant i_q et la puissance électrique P_e comme normalement négatifs.

On peut, si on le désire, se ramener aux signes usuels moyennant le changement de variables sur les équations précédentes :

$$C'_e = -\, C_e$$

$$i'_q = -\, i_q\,.$$

8 CAS DES MACHINES MULTIPOLAIRES (p_1 paires de pôles)

Conformément au paragraphe 3 du chapitre I, les seules modifications à apporter dans ce cas aux relations ci-dessus consistent à multiplier le couple C_e par p_1, à diviser l'inertie J par p_1 dans l'équation du mouvement et à considérer pour ω_r

la vitesse électrique (produit par p_1 de la vitesse mécanique Ω_r). Les relations (3.11) et (1.23) deviennent :

$$C_e = p_1(\psi_d\, i_q - \psi_q\, i_d)$$

$$C_m - C_e = \frac{J}{p_1} \times \frac{d\omega_r}{dt}.$$

9 FONCTIONNEMENT EN TRANSFORMATEUR

La suite de cet ouvrage nous montrera que les équations magnétiques, électriques et mécaniques des machines électriques tournantes (notamment synchrones et asynchrones) sont du même type que (3.6), (3.7), (3.10) et (3.11).

Nous pouvons montrer que ces équations traduisent aussi le fonctionnement en transformateur, qui est d'ailleurs un cas particulier de fonctionnement de la machine à courant continu généralisée.

Il suffit de supposer que figure 3.2 seuls subsistent l'inducteur et les balais d'axe direct. Les équations générales (3.6) et (3.10) conduisent alors à :

$$v_f = R_f\, i_f + L_f \frac{di_f}{dt} + M_{fd} \frac{di_d}{dt}$$

$$-v_d = R i_d + L \frac{di_d}{dt} + M_{fd} \frac{di_f}{dt}.$$

Ce sont les équations d'un transformateur ; la rotation n'a aucune influence sur le fonctionnement et d'ailleurs le couple est nul.

Bien entendu, cet exemple n'a aucune valeur industrielle, il est simplement donné pour illustrer le caractère général du modèle mathématique de machine.

CHAPITRE IV

RÉGIMES TRANSITOIRES DES MACHINES A COURANT CONTINU

Le modèle mathématique établi au chapitre III permet d'étudier tous les régimes transitoires qui peuvent prendre naissance dans une machine à courant continu, notamment :

— Régimes transitoires relatifs à la mise en œuvre (amorçage des génératrices, stabilité naturelle des génératrices ou des moteurs...).

— Fonctionnements perturbés (variation brusque de tension, courts-circuits...).

— Problèmes de réglage dans les systèmes comportant des machines à courant continu.

— Particularités résultant de l'alimentation par des sources non constantes (redresseurs ou hacheurs).

Nous nous limiterons à quelques exemples significatifs, soit sur le plan de la méthode, soit sur le plan de l'importance pratique.

1 EXEMPLE DE PERTURBATION BRUSQUE : COURT-CIRCUIT AUX BORNES D'UNE GÉNÉRATRICE SHUNT

Considérons figure 4.1 une génératrice shunt fonctionnant initialement à un régime caractérisé par les valeurs V_{q0}, I_{q0}, I_{f0} ; la mise en court-circuit est simulée par la fermeture de l'interrupteur K. On suppose que la vitesse reste constante pendant le phénomène.

(La variation de vitesse joue un rôle secondaire dans ce problème, du fait qu'elle est généralement faible, surtout aux premiers instants, les plus significatifs au regard des contraintes subies).

Les équations générales sont les équations (3.13) avec $v_f = v_q$, soit :

$$(4.1) \qquad \begin{cases} v_q = R_f\, i_f + L_f \dfrac{di_f}{dt} \\ v_q = M_{fd}\, \omega_r\, i_f - R i_q - L \dfrac{di_q}{dt}. \end{cases}$$

ω_r étant supposée constante, le système est linéaire et le problème peut être résolu à l'aide du calcul opérationnel.

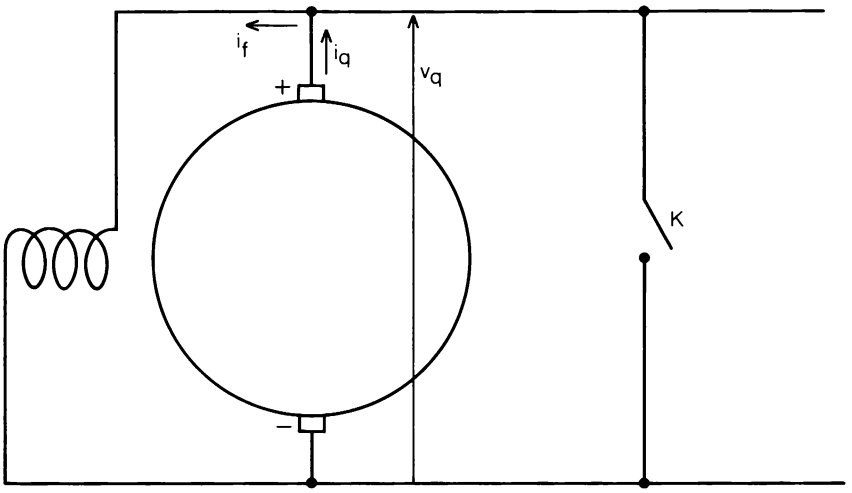


Fig. 4.1. — Court-circuit aux bornes d'une génératrice shunt.

Le régime initial obéit aux relations :

$$V_{q0} = R_f I_{f0}$$
$$V_{q0} = M_{fd} \omega_r I_{f0} - R I_{q0}$$

et la transformée de Laplace de (4.1) avec $v_q(p) = 0$

$$0 = R_f i_f + L_f p i_f - L_f I_{f0}$$
$$0 = M_{fd} \omega_r i_f - R i_q - L p i_q + L I_{q0}$$

d'où on tire immédiatement :

$$i_f(p) = \frac{L_f I_{f0}}{R_f + L_f p}$$

$$i_q(p) = \frac{L I_{q0}}{R + Lp} + \frac{M_{fd} \omega_r L_f I_{f0}}{(R_f + L_f p)(R + Lp)} \qquad (4.2)$$

Régime du courant inducteur

$$i_f(t) = I_{f0} \exp\left(-\frac{R_f}{L_f} t\right).$$

Le courant inducteur s'éteint simplement avec la seule constante de temps de son enroulement, comme cela résulte avec évidence de la première équation (4.1).

Régime du courant induit

En décomposant la deuxième fraction de (4.2) en éléments simples, il vient :

$$i_q(p) = \frac{I_{q0}}{p + R/L} + \frac{M_{fd}\,\omega_r\,L_f\,I_{f0}}{RL_f - R_f\,L}\left(\frac{1}{p + R_f/L_f} - \frac{1}{p + R/L}\right)$$

d'où :

$$(4.3)\quad i_q(t) = I_{q0}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + \frac{M_{fd}\,\omega_r\,L_f\,I_{f0}}{RL_f - R_f\,L}\left(\exp\left(-\frac{R_f}{L_f}t\right) - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right).$$

Ce régime est la somme de deux exponentielles, l'une d'elles étant décomposée en deux termes distincts pour faciliter l'interprétation (fig. 4.2) ; la forme de la courbe s'explique si on remarque que OA = OB et que la constante de temps de l'inducteur L_f/R_f est toujours plus grande que celle de l'induit L/R, surtout lorsque la machine est compensée (voir chapitre III, § 6.2.2).

L'explication physique est la suivante : le premier terme de (4.3) correspond à la décharge naturelle du courant d'induit ; cependant, le courant inducteur, donc le flux qu'il créé, ne s'éteint qu'avec sa propre constante de temps et continue à induire une f.é.m. dans l'induit. L'induit suscite alors un courant antagoniste d'amplitude telle qu'au premier instant les ampères-tours suscités équilibrent ceux de l'inducteur (dernière parenthèse de (4.3)), puisque le flux ne peut varier instantanément dans un bobinage mis brusquement en court-circuit. Les ampères-tours antagonistes de l'induit s'éteignent, eux, avec la constante de temps de l'induit.

Remarque : Si la machine comportait en outre un enroulement série (machine compound), les équations de départ seraient (2.16), avec $v_f = v$.

Le principe du calcul est le même, mais son déroulement est un peu plus compliqué du fait du couplage magnétique entre les enroulements d'axe direct. Le système est alors du deuxième ordre et ne comporte donc que deux constantes de temps distinctes, qu'on retrouve dans l'expression temporelle de $i_f(t)$ et de $i_q(t)$.

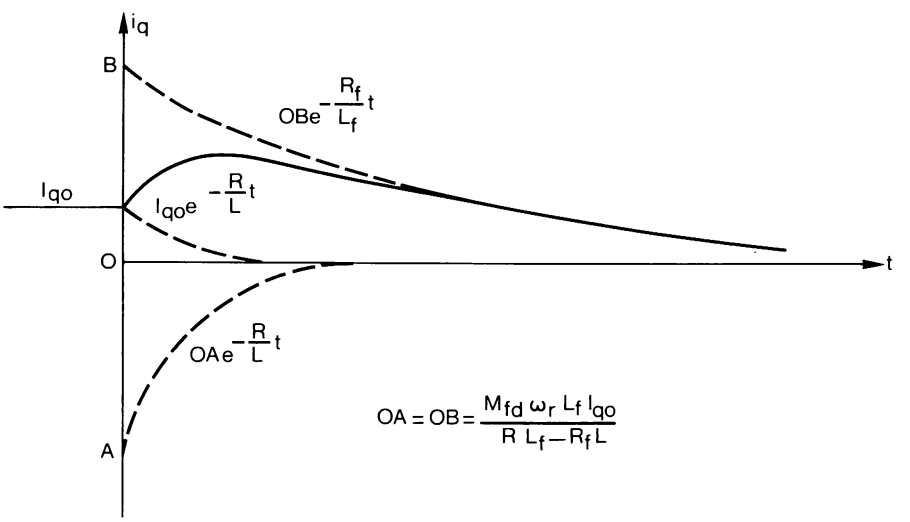


Fig. 4.2. — Courant dans l'induit d'une génératrice shunt lors d'un court-circuit brusque.

2 RÉGLAGE DE VITESSE D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU

2.1 Moteur à excitation séparée

Considérons figure 4.3 un moteur à courant continu à excitation séparée. Nous conservons les mêmes conventions de signes qu'en génératrice (noter le sens de i_q) : aux équations électriques (3.13), nous ajoutons l'équation mécanique obtenue en regroupant (1.22) et (3.14) :

$$(4.4) \qquad \begin{cases} v_f = R_f\, i_f + L_f \dfrac{di_f}{dt} \\ v_q = M_{fd}\, \omega_r\, i_f - R i_q - L \dfrac{di_q}{dt} \\ C_m = M_{fd}\, i_f\, i_q + J \dfrac{d\omega_r}{dt}. \end{cases}$$

Notes

1. On considère le fonctionnement en moteur donc normalement i_q est négatif ainsi que $C_e = M_{fd}\, i_f\, i_q$ et C_m.
2. En multipolaire, la dernière équation s'écrirait :

$$C_m = p_1\, M_{fd}\, i_f\, i_q + \frac{J}{p_1} \frac{d\omega_r}{dt}.$$

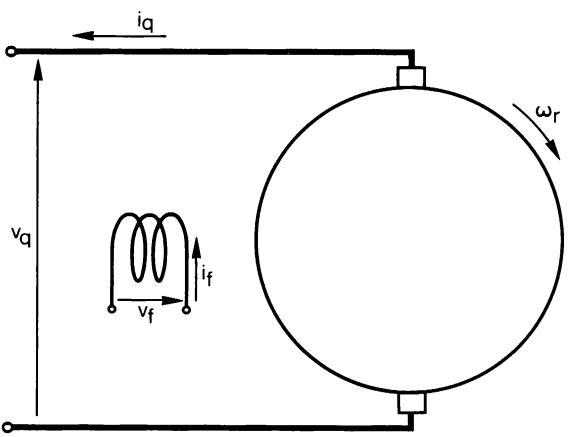


Fig. 4.3. — Moteur à excitation séparée (convention de signes « génératrice »).

2.1.1 *Expression de la vitesse dans le cas général*

Le système (4.4) n'est linéaire, en régime de variation de vitesse, que si i_f est maintenu constant ; il suffit pour cela, d'après la première équation, que la tension d'excitation v_f soit maintenue constante, le *réglage se faisant par action sur la tension d'induit* v_q, ce que nous supposons par la suite.

Cette méthode de réglage est nettement préférable d'une part parce que les équations sont linéaires, ce qui est favorable pour obtenir de bonnes qualités de réglage, et d'autre part parce que l'action sur v_f se répercuterait sur la vitesse en faisant intervenir la constante de temps L_f/R_f indésirable.

Supposons qu'on applique au moteur, à partir de l'état initial, une variation quelconque de la tension d'alimentation v_q, soit Δv_q et du couple mécanique C_m, soit ΔC_m, indépendantes l'une de l'autre. On peut appliquer au système (4.4) la transformation de Laplace, i_f étant constant et égal à I_{f0}

$$\begin{aligned} \Delta v_q &= M_{fd} I_{f0} \Delta\omega_r - (R + Lp) \Delta i_q \\ \Delta C_m &= M_{fd} I_{f0} \Delta i_q + Jp \Delta\omega_r . \end{aligned} \tag{4.5}$$

La variation de vitesse correspondante s'obtient en éliminant Δi_q entre ces deux équations :

$$\Delta\omega_r = \frac{M_{fd} I_{f0} \Delta v_q + (R + Lp) \Delta C_m}{(M_{fd} I_{f0})^2 + (R + Lp) Jp} . \tag{4.6}$$

Cette expression peut s'écrire plus simplement en posant :

$$k_1 = \frac{1}{M_{fd} I_{f0}} \quad T = \frac{L}{R} \quad T_m = \frac{RJ}{(M_{fd} I_{f0})^2}$$

$$\Delta\omega_r = \frac{k_1 \Delta v_q + \dfrac{T_m}{J}(1 + Tp) \Delta C_m}{1 + T_m p(1 + Tp)} . \tag{4.7}$$

Si la réaction d'induit est compensée, L est négligeable ainsi que T, cette équation se réduit à :

$$\Delta\omega_r = \frac{k_1 \Delta v_q + \dfrac{T_m}{J} \Delta C_m}{1 + T_m p} . \tag{4.8}$$

La réponse de ω_r à une variation de v_q ou de C_m se fait avec la *constante de temps* T_m *dite constante de temps mécanique du moteur.*

2.1.2 *Cas où le couple mécanique est fonction de la vitesse*

Le couple mécanique opposé au moteur peut subir des variations extérieures résultant de ses conditions d'utilisation (exemples : moteur entraînant un laminoir, une cage d'extraction de mine, une machine-outil). Dans ce cas, ΔC_m doit être remplacé par la perturbation appliquée, fonction du temps, c'est-à-dire de p, en notations opérationnelles.

Le couple résistant peut également être fonction de la vitesse seule (exemple : moteur entraînant un ventilateur ou une pompe, les conditions de température et de pression du fluide étant stables). Alors, dans le système C_m doit être remplacé par son expression en fonction de ω_r ; dans l'équation (4.6), ΔC_m disparaît au numérateur, et, au dénominateur, au terme Jp est ajouté un terme additionnel.

Si par exemple le couple mécanique résistant est proportionnel à la vitesse, on aura :

$$C_m = - k\omega_r$$

k étant positif (par suite de la convention de signe sur C_m).

L'équation (4.6) devient :

$$\Delta\omega_r = \frac{M_{fd} I_{f0} \Delta v_q}{(M_{fd} I_{f0})^2 + (R + Lp)(Jp + k)}. \tag{4.9}$$

Notons que ce cas est celui bien connu des *petits moteurs de servo-mécanismes*, dans lesquels le couple résistant est réduit au seul couple de frottement, proportionnel à la vitesse.

Si on néglige L (4.9) devient

$$\Delta\omega_r = \frac{M_{fd} I_{f0} \Delta v_q}{(M_{fd} I_{f0})^2 + kR + RJp}. \tag{4.10}$$

La fonction de transfert est ici encore du 1er degré, mais la constante de temps est diminuée par rapport au cas de la formule (4.8).

2.1.3 *Réglage de vitesse en supposant le couple indépendant de la vitesse*

Les performances du système de réglage de vitesse d'un moteur industriel sont le plus souvent étudiées en supposant le couple mécanique indépendant de la vitesse.

La transmittance opérationnelle du moteur, reliant sa vitesse ω_r à la tension d'alimentation v_q, est alors simplement, d'après (4.8).

$$\frac{\Delta\omega_r}{\Delta v_q} = \frac{k_1}{1 + T_m p} \tag{4.11}$$

et sera insérée sous cette forme dans la chaîne du servomécanisme en boucle ouverte.

En fonction des valeurs numériques de k_1 et de T_m seront alors choisis les autres paramètres de la chaîne d'action et de réaction, à l'aide des méthodes habituelles d'étude des servomécanismes, de façon à obtenir les performances souhaitées.

3.2 Moteur série

Le schéma est celui de la figure 4.4. L'enroulement d'excitation est ici indicé f, notons qu'il doit être connecté de façon à créer un flux positif malgré le changement de sens du courant.

Partant des équations générales (3.13) relatives au fonctionnement en génératrice, nous introduisons la convention moteur et le fait que i_f doit être égal à i'_q et de même signe.

$$i'_q = i_f = - i_q .$$

La connexion de l'inducteur et de l'induit entraîne

$$v = v_q + v_f \qquad (v = \text{tension aux bornes})$$

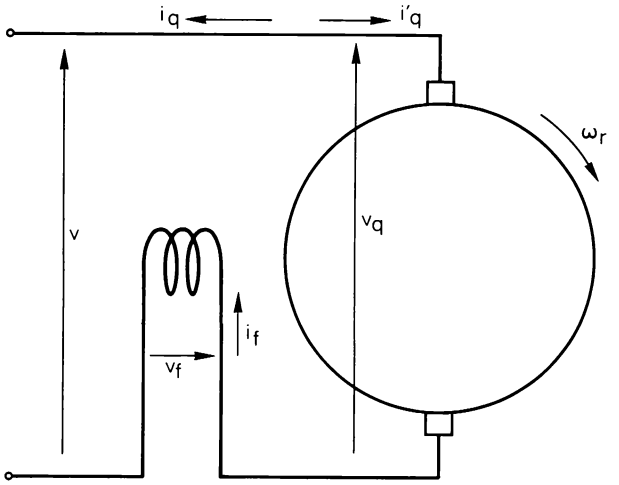


Fig. 4.4. — Moteur série.

d'où en portant dans (2.13) et précisant les fonctions du temps

$$v(t) = M_{fd}\,\omega_r(t)\,i'_q(t) + (R_f + R)\,i'_q(t) + (L_f + L)\frac{di'_q(t)}{dt}. \tag{4.12}$$

Pour la cohérence on considérera le couple électromagnétique moteur comme positif soit :

$$C'_e = -C_e = -M_{fd}\,i_q\,i_f = M_{fd}\,i'^2_q(t)$$

et le couple mécanique résistant comme positif soit :

$$C'_m = -C_m$$

d'où l'équation du mouvement :

$$M_{fd}\,i'^2_q(t) - C'_m(t) = J\frac{d\omega_r(t)}{dt}. \tag{4.13}$$

Le comportement du moteur série est décrit par les deux équations (4.12) et (4.13). Le système est non linéaire et le calcul ne peut être poursuivi plus avant : l'étude ne peut être faite qu'à l'aide d'un auxiliaire de calcul.

Autres types de régimes transitoires. Remarques sur les hypothèses simplificatrices

Nous ne pouvons développer ici tous les types de régimes transitoires signalés au début du chapitre. Donnons cependant quelques indications à leur égard :

— *L'étude de l'auto-amorçage et de la stabilité naturelle* des génératrices à courant continu (problèmes qui concernaient essentiellement les génératrices à auto-excitation shunt ou série) ne présente plus beaucoup d'intérêt du fait que ce type de fonctionnement n'est pratiquement plus utilisé. Notons que pour ce

genre de problème, il était nécessaire de tenir compte de la saturation du circuit magnétique.

— *L'association de moteurs à courant continu et de convertisseurs statiques* (redresseurs, réversibles ou non, hacheurs...) se traite à deux niveaux en ce qui concerne l'échelle de temps considérée.

L'analyse « macroscopique » consiste à considérer seulement la valeur moyenne, sur une arche de redressement, de la tension redressée. Le redresseur est alors considéré comme une source de tension continue caractérisée par cette valeur moyenne, elle-même susceptible de variation pour réaliser la commande ou la régulation de vitesse.

L'analyse « microscopique » consiste à étudier la réponse du système aux irrégularités de la forme d'onde de la tension redressée. Les irrégularités entraînent des contraintes (surtensions, pertes supplémentaires) affectant notamment les redresseurs de puissance et l'étude mathématique, utilisant pour la machine le modèle établi au chapitre III, permet d'évaluer l'amplitude de ces contraintes et les moyens propres à les réduire.

En ce qui concerne les hypothèses simplificatrices qui ont été adoptées pour la mise en équations et pour les applications traitées en exemple, elles permettent d'effectuer très simplement une première approche des régimes transitoires et d'en dégager les caractéristiques essentielles. Cependant l'obtention d'une évaluation numérique correcte nécessite de procéder, en deuxième étape, à une analyse plus fine, conduisant d'ailleurs la plupart du temps à un modèle mathématique non linéaire dont la résolution requiert une simulation analogique ou digitale.

Les deux particularités qui devront souvent être prises en compte à cet effet sont :

— les non-linéarités de la caractéristique magnétique, entraînant non seulement la dépendance des inductances propres et mutuelles, pour un point de fonctionnement donné, vis-à-vis du flux qui les traverse, mais encore la nécessité de considérer les valeurs « incrémentales » de ces inductances, évaluées, lors de variations de faible ou moyenne amplitude, à partir de la pente de la caractéristique magnétique au point de fonctionnement considéré ; on peut également être amené à considérer des cycles d'hystérésis partiels en vue de cette évaluation ;

— le fait que souvent les pôles inducteurs des machines à courant continu sont massifs et se comportent donc comme un circuit supplémentaire, couplé magnétiquement avec les autres circuits de même axe, mais faisant intervenir l'effet pelliculaire ce qui rend difficile la représentation à l'aide de résistances et d'inductances constantes. Pour cette raison, lorsque l'utilisation normale d'une machine à courant continu implique des variations rapides de régime du flux inducteur, il est préférable de feuilleter les pôles. Ce feuilletage n'est en général pas très fin (épaisseur des tôles de l'ordre de 1 à 2 mm) si bien qu'on peut souvent détecter, dans les régimes transitoires, la présence d'une constante de temps supplémentaire de très courte durée, due à la circulation de courants de Foucault dans ces tôles.

CHAPITRE V

MISE EN ÉQUATIONS DES MACHINES SYNCHRONES

Dans ce chapitre la mise en équations à l'aide de la décomposition selon deux axes est présentée de façon assez détaillée afin d'une part de bien montrer que le modèle mathématique obtenu n'est valable en toute rigueur que dans le cadre des hypothèses simplificatives adoptées, et d'autre part de bien faire saisir l'interprétation physique du changement de variables associé à cette décomposition.

Cependant, à l'intention du lecteur déjà familiarisé avec la théorie des machines synchrones, ou désireux d'aborder plus rapidement l'étude des régimes transitoires proprement dits, on a établi ci-dessous un résumé relatif aux étapes et résultats essentiels.

Résumé : La machine étudiée (voir fig. 5.1 et 5.2 en représentation bipolaire) comporte au stator un enroulement triphasé a, b, c, au rotor un enroulement d'excitation f d'axe Od et des enroulements amortisseurs, en court-circuit, qu'on suppose assimilables à deux enroulements en quadrature D et Q, d'axes Od et Oq.

Les hypothèses essentielles sont l'absence de saturation et la distribution sinusoïdale de la f.m.m. créée par les enroulements du stator.

La position du rotor est caractérisée par l'angle $\theta = (Oa, Od)$ et sa vitesse est $\omega_r = d\theta/dt$.

Les équations électriques sont alors (5.3) à (5.6), et les relations entre flux et courants (5.16).

Le changement de variables appliqué aux grandeurs (courants, flux, tensions) d'indices a, b, c consiste à les remplacer par des grandeurs en même nombre d'indice d (direct), q (quadrature) et o (présentant une analogie avec la composante homopolaire utilisée dans la méthode des composantes symétriques).

Le changement de variables est défini par la matrice **A** (5.21), dont l'inverse est $\mathbf{A}^{-1}$ (5.22).

Moyennant ce changement de variables les équations électriques (5.3) deviennent (5.30) à (5.32), les équations électriques (5.4) à (5.6) sont inchangées, et les relations entre flux et courant (5.16) se transforment en (5.38) à (5.40); la comparaison de ces trois dernières relations avec (5.16) montre clairement la simplification obtenue.

Le changement de variables peut être interprété physiquement, en ce qui concerne les composantes d et q, comme correspondant à la substitution, aux enroulements immobiles a, b, c (fig. 5.1 ou 5.2), de deux enroulements d et q d'axes magnétiques Od et Oq donc tournant avec le rotor, mais constitués de conducteurs immobiles comme le sont a, b, c (fig. 5.6).

La puissance électrique instantanée produite par le stator a pour expression (5.43), le couple électromagnétique (5.44), et l'équation du mouvement (5.45). Dans le cas d'une machine multipolaire seules ces deux dernières équations sont modifiées et deviennent (5.46) et (5.47).

1 DESCRIPTION, HYPOTHÈSES SIMPLIFICATRICES, CONVENTION DE SIGNES

1.1 Description

La machine synchrone dont nous allons étudier la mise en équations correspond à la structure de principe représentée figure 5.1 dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation.

L'inducteur tournant, appelé aussi rotor, bipolaire, est représenté dans le cas de la structure à pôles saillants : l'entrefer est variable, mais il est symétrique par rapport à deux axes perpendiculaires, l'axe direct (ou polaire ou longitudinal) O*d* et l'axe en quadrature (ou interpolaire ou transversal) O*q*. Il comporte un enroulement dit enroulement inducteur, bobiné autour des pôles et des « amortisseurs », ensemble de barres conductrices logées dans des encoches longitudinales au voisinage de la périphérie des pôles. Ces barres sont réunies aux deux extrémités de la machine par deux couronnes conductrices, de façon analogue à la « cage d'écureuil » d'un moteur asynchrone. Cette couronne est parfois interrompue au droit des espaces interpolaires.

La présence de circuits amortisseurs, qui n'interviennent pas dans l'étude du régime permanent synchrone idéalisé (c'est-à-dire négligeant tous les harmo-

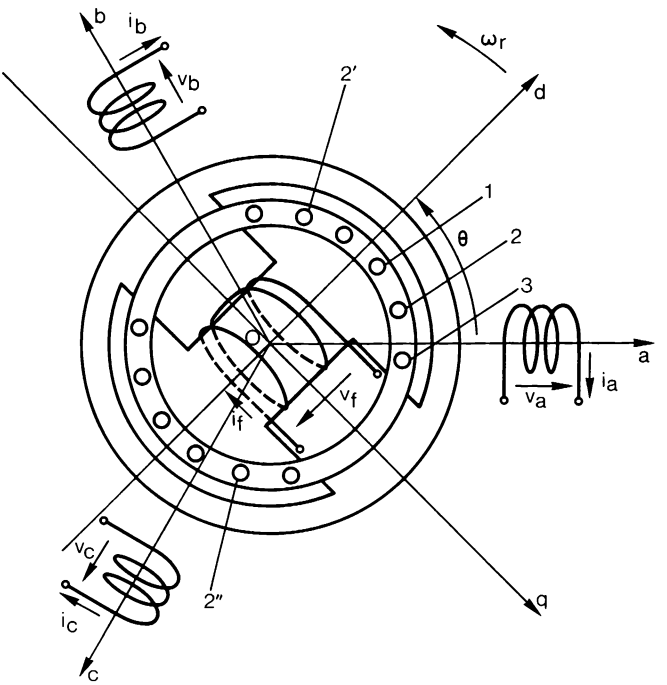


Fig. 5.1. — Machine synchrone triphasée avec amortisseurs.

niques et les petites oscillations de vitesse), complique un peu l'étude des régimes transitoires mais leur influence lors de ces régimes est telle qu'il est impossible de les négliger et c'est pourquoi il a paru préférable de les introduire d'emblée.

L'induit fixe, appelé aussi stator, séparé de l'entrefer par une surface cylindrique, est muni d'un enroulement triphasé a, b, c (enroulement classique à champ tournant), représenté conventionnellement comme sur la figure, du côté positif des axes Oa, Ob, Oc.

Par la suite nous indiquerons comment le modèle mathématique s'étend :

— aux machines multipolaires

— au cas d'une machine à entrefer constant.

L'inducteur est animé d'une vitesse de rotation ω_r comptée positivement dans le sens trigonométrique.

La direction positive de Od correspond à l'orientation naturelle des lignes d'induction créées par l'inducteur. Oq est en retard de $\pi/2$ par rapport à Od, dans le sens trigonométrique.

La position de l'inducteur est caractérisée par l'angle que fait Oa avec Od, soit θ_a appelé aussi θ, compté positivement dans le sens trigonométrique ; l'axe Ob est en avance de $2\pi/3$ par rapport à Oa et Oc en avance de $4\pi/3$ par rapport à Oa, d'où les relations :

$$(5.1) \qquad \begin{cases} \theta_a = (\mathrm{O}a, \mathrm{O}d) = \theta \\ \theta_b = (\mathrm{O}b, \mathrm{O}d) = \theta - \dfrac{2\pi}{3} \\ \theta_c = (\mathrm{O}c, \mathrm{O}d) = \theta - \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$(5.2) \qquad \boxed{\omega_r = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}}.$$

1.2 Hypothèses simplificatrices

— On suppose que le circuit magnétique n'est pas saturé, ce qui permet d'exprimer les flux comme fonctions linéaires des courants.

— On suppose le circuit magnétique parfaitement feuilleté, ce qui permet de considérer que seuls les enroulements (inducteur, induit, amortisseurs) sont parcourus par des courants et en outre on suppose que la densité de courant peut être considérée comme uniforme dans la section des conducteurs élémentaires (absence d'effet pelliculaire).

— L'hypothèse dite « sinusoïdale » demande à être un peu plus détaillée que dans le cas des machines à courant continu, du fait que les machines synchrones sont destinées à fonctionner en courant alternatif ; cette hypothèse peut s'exprimer ici de la façon simple suivante :

« On ne considère que le premier harmonique d'espace de la distribution de force magnétomotrice créée par chaque phase de l'induit. »

Les implications et conséquences de cet énoncé sont développées au paragraphe 2.3.

— Enfin on admettra que l'ensemble des amortisseurs peut être représenté par deux enroulements fermés en court-circuit sur eux-mêmes, l'un dit « amortisseur d'axe direct » (indice D) d'axe magnétique dirigé selon O*d*, l'autre dit « amortisseur d'axe en quadrature » (indice Q) d'axe magnétique dirigé selon O*q*, de sorte que la figure 5.1 donne lieu à la représentation schématique de la figure 5.2.

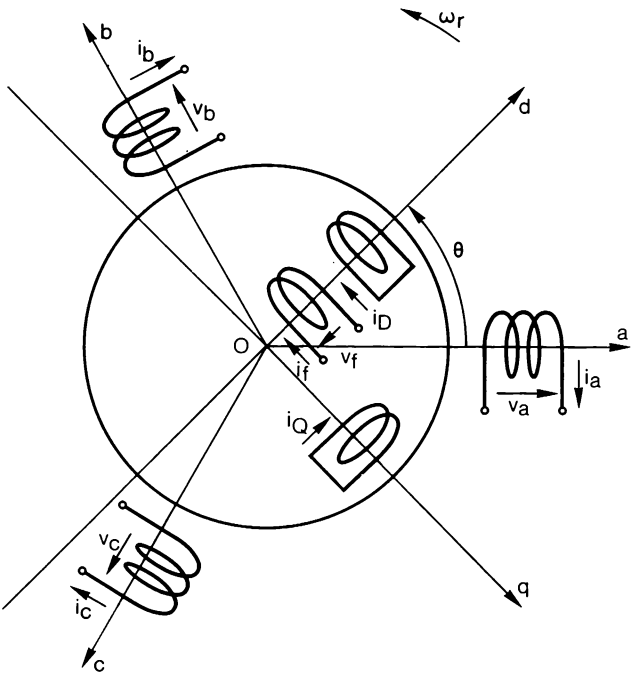


Fig. 5.2. — Machine synchrone triphasée ; amortisseurs assimilés à deux enroulements en court-circuit, en quadrature l'un de l'autre.

Cette approximation est justifiée par le fait que les barres d'amortisseurs sont normalement de même section, disposées régulièrement à la surface des pôles, et respectent les symétries par rapport aux axes O*d* et O*q*. Notons pour la bonne compréhension que lors de l'établissement des caractéristiques numériques des circuits amortisseurs, dont le calcul sort du cadre de cet exposé, chaque barre d'amortisseur est prise en compte deux fois : une fois comme faisant partie d'un circuit d'axe direct, et il lui est attribué un courant i_{kD} (exemple : courant i_{2D} dans la barre 2 associée à la barre 2′, fig. 5.1), et une fois comme faisant partie d'un circuit d'axe en quadrature, et il lui est attribué un courant i_{kQ} (exemple : courant i_{2Q} dans la barre 2 associée à la barre 2″, fig. 5.1). Le courant réel dans la barre, si on voulait le calculer, serait alors $i_{kD} + i_{kQ}$. Nous avons déjà rencontré pratiquement le même exemple de décomposition dans l'induit de la machine à courant continu à quatre balais, où au courant dans chaque conducteur était affectée une contribution à i_d et à i_q.

1.3 Conventions de signes

Les conventions associées aux équations électriques et magnétiques sont les mêmes que pour la machine à courant continu

— un courant positif crée à travers son propre enroulement un flux positif
— une f.é.m. positive fait circuler un courant positif.
— l'inducteur est considéré comme récepteur, l'induit comme générateur (convention sans objet pour les amortisseurs, ceux-ci étant en court-circuit).

En outre, comme indiqué au paragraphe 1.1, le sens positif de la vitesse et des angles est le sens trigonométrique ; cette convention contraire à celle adoptée pour les machines à courant continu, est liée au fait que les dispositions relatives de l'inducteur et de l'induit (fixe ou mobile) sont permutées entre les deux machines, et il en résulte que malgré cette permutation les équations finales se présentent avec les mêmes signes.

2 ÉQUATIONS ÉLECTRIQUES ET MAGNÉTIQUES

2.1 Equations électriques

Compte tenu des conventions de signes ci-dessus, les six enroulements de la figure 5.2 obéissent aux équations :

$$(5.3)\qquad \begin{cases} v_a = -\,R_a\, i_a - \dfrac{d\psi_a}{dt} \\ v_b = -\,R_a\, i_b - \dfrac{d\psi_b}{dt} \\ v_c = -\,R_a\, i_c - \dfrac{d\psi_c}{dt} \end{cases}$$

$$(5.4)\qquad v_f = R_f\, i_f + \frac{d\psi_f}{dt}$$

$$(5.5)\qquad 0 = R_D\, i_D + \frac{d\psi_D}{dt}$$

$$(5.6)\qquad 0 = R_Q\, i_Q + \frac{d\psi_Q}{dt}$$

en appelant :
R_a = résistance d'une phase de l'induit.
R_f, R_D, R_Q = résistance de l'inducteur, de l'amortisseur d'axe d, de l'amortisseur d'axe q
$\psi_k (k = a, b, c, f, D, Q)$ = flux d'enroulement traversant l'enroulement k.

2.2 Relations entre flux et courants

En vertu de l'hypothèse de non-saturation et de feuilletage du circuit magnétique, les flux sont liés aux courants par les relations suivantes, exprimées sous

forme matricielle, et dans lesquelles les coefficients $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ sont des fonctions de l'angle θ :

$$(5.7) \qquad \begin{vmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{L}_a & \mathfrak{M}_{ab} & \mathfrak{M}_{ac} & \mathfrak{M}_{af} & \mathfrak{M}_{aD} & \mathfrak{M}_{aQ} \\ \mathfrak{M}_{ab} & \mathfrak{L}_b & \mathfrak{M}_{bc} & \mathfrak{M}_{bf} & \mathfrak{M}_{bD} & \mathfrak{M}_{bQ} \\ \mathfrak{M}_{ac} & \mathfrak{M}_{bc} & \mathfrak{L}_c & \mathfrak{M}_{cf} & \mathfrak{M}_{cD} & \mathfrak{M}_{cQ} \\ \mathfrak{M}_{af} & \mathfrak{M}_{bf} & \mathfrak{M}_{cf} & \mathfrak{L}_f & \mathfrak{M}_{fD} & \mathfrak{M}_{fQ} \\ \mathfrak{M}_{aD} & \mathfrak{M}_{bD} & \mathfrak{M}_{cD} & \mathfrak{M}_{fD} & \mathfrak{L}_D & \mathfrak{M}_{DQ} \\ \mathfrak{M}_{aQ} & \mathfrak{M}_{bQ} & \mathfrak{M}_{cQ} & \mathfrak{M}_{fQ} & \mathfrak{M}_{DQ} & \mathfrak{L}_Q \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{vmatrix} .$$

Explicitons d'abord ces coefficients en l'absence d'hypothèse sinusoïdale :

— $\mathfrak{L}_a$ est une fonction périodique de θ, de période π, dont le développement en série de FOURIER peut s'écrire :

$$\mathfrak{L}_a = \mathrm{L}_{a0} + \mathrm{L}_{a2} \cos 2\,\theta + \mathrm{L}_{a4} \cos 4\,\theta + \cdots$$

$\mathfrak{L}_b$ et $\mathfrak{L}_c$ s'en déduisent en remplaçant θ respectivement par $\theta - \frac{2\pi}{3}$ et $\theta - \frac{4\pi}{3}$.

— $\mathfrak{M}_{ab}$ est une fonction périodique de θ, de période π, extrêmale quand l'inducteur occupe la position bissectrice entre Oa et Ob, soit $\theta = \pi/3$ d'où, son développement en série de FOURIER :

$$\mathfrak{M}_{ab} = \mathrm{M}_{ab0} + \mathrm{M}_{ab2} \cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{M}_{ab4} \cos 4\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \cdots$$

Le développement, avec la variable $\theta - \frac{\pi}{3}$, ne comporte que des cosinus car $\mathfrak{M}_{ab}$ doit avoir même valeur pour deux positions de l'inducteur symétriques par rapport à $\pi/3$. $\mathfrak{M}_{bc}$ et $\mathfrak{M}_{ac}$ s'en déduisent en remplaçant θ respectivement par $\theta - \frac{2\pi}{3}$ et $\theta - \frac{4\pi}{3}$.

— $\mathfrak{M}_{af}$ est une fonction périodique de θ, de période de 2π, dont le développement en série de FOURIER peut s'écrire (compte tenu des symétries) :

$$\mathfrak{M}_{af} = \mathrm{M}_{af1} \cos \theta + \mathrm{M}_{af3} \cos 3\,\theta + \mathrm{M}_{af5} \cos 5\,\theta + \cdots$$

$\mathfrak{M}_{bf}$ et $\mathfrak{M}_{cf}$ s'en déduisent en remplaçant θ respectivement par $\theta - \frac{2\pi}{3}$ et $\theta - \frac{4\pi}{3}$.

— De même $\mathfrak{M}_{aD}$, $\mathfrak{M}_{bD}$, $\mathfrak{M}_{cD}$, $\mathfrak{M}_{aQ}$, $\mathfrak{M}_{bQ}$, $\mathfrak{M}_{cQ}$

$$\mathfrak{M}_{aD} = \mathrm{M}_{aD1} \cos \theta + \mathrm{M}_{aD3} \cos 3\,\theta + \mathrm{M}_{aQ5} \cos 5\,\theta + \cdots$$

et $\mathfrak{M}_{bD}$ et $\mathfrak{M}_{cD}$ en remplaçant θ par $\theta - \frac{2\pi}{3}$ et $\theta - \frac{4\pi}{2}$ respectivement ;

$$\mathfrak{M}_{aQ} = \mathrm{M}_{aQ1} \sin \theta + \mathrm{M}_{aQ3} \sin 3\,\theta + \mathrm{M}_{aQ5} \sin 5\,\theta + \cdots$$

et $\mathfrak{M}_{bQ}$ et $\mathfrak{M}_{cQ}$ en remplaçant θ par $\theta - \frac{2\pi}{3}$ et $\theta - \frac{4\pi}{3}$ respectivement.

— Les coefficients d'inductance propre et mutuelle relatifs au rotor seul sont tous des constantes (dont certaines sont nulles), à cause du caractère cylindrique de la surface limitant l'induit. Nous écrirons donc (en observant la figure 5.2)

$$\mathcal{L}_f = L_{ff} \quad \mathcal{M}_{fD} = M_{fD} \quad \mathcal{L}_D = L_{DD} \quad \mathcal{L}_Q = L_{QQ}$$
$$\mathcal{M}_{fQ} = 0 \qquad \mathcal{M}_{DQ} = 0$$

(Nous adoptons un indice double pour les inductances propres du rotor, parce que l'indice simple sera affecté plus tard aux inductances de fuites.)

2.3 Implication et conséquences de l'hypothèse de distribution sinusoïdale de la force magnétomotrice d'induit

Nous allons raisonner seulement sur la phase a; l'extension des conséquences aux phases b et c est immédiate.

Adoptons (fig. 5.3) l'axe de la phase a comme origine des angles, et appelons ζ la coordonnée angulaire qui caractérisera les distributions de f.m.m. et d'induction.

L'hypothèse du premier harmonique consiste à admettre que la f.m.m. créée par i_a s'écrit :

$$F_a(\zeta) = \frac{4}{\pi} n'_s \, i_a \cos \zeta \tag{5.8}$$

n'_s = nombre effectif de spires en série par pôle et par phase.

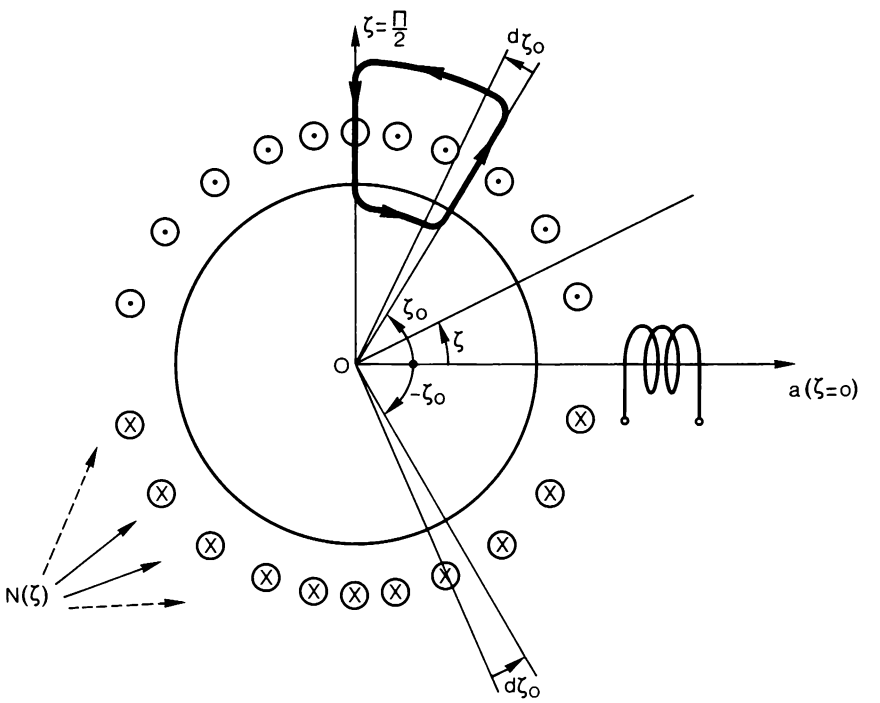


Fig. 5.3. — Illustration de la méthode de calcul du flux d'enroulement.

2.3.1 *Implication*

On doit considérer que les conducteurs de la phase a (resp. b, c) sont à distribution sinusoïdale.

En effet, considérons la figure 5.3 sur laquelle on a représenté les seuls conducteurs de la phase *a*, mais à des emplacements quelconques, correspondant à une distribution N(ζ) (densité de conducteurs par unité d'angle) qu'on se propose de déterminer pour qu'elle entraîne la loi (5.8).

En vertu de (5.8) $F_a(\zeta) = 0$ pour $\zeta = \pi/2$ et le décompte des ampères traversant le contour fléché de la figure 5.3 nous donne :

$$F_a(\zeta_0) = \int_{\zeta_0}^{\pi/2} N(\zeta)\, i_a\, d\zeta = \frac{4}{\pi} n'_s\, i_a \cos \zeta_0 \tag{5.9}$$

d'où N(ζ) en dérivant sous le signe somme :

$$N(\zeta) = \left| \frac{4}{\pi} n'_s \sin \zeta \right| . \tag{5.10}$$

Le signe « valeur absolue » indique que N(ζ) est nécessairement positif, le changement de signe dans (5.9) étant pris en compte par i_a.

Le résultat (5.10) doit être interprété comme suit :

Pour créer une f.m.m. purement sinusoïdale telle que (5.8), les conducteurs devraient être distribués selon la loi (5.10), distribution sinusoïdale et en particulier continue. Cette distribution doit donc être considérée comme l'approximation du premier harmonique du bobinage réel, et être adoptée à sa place lorsqu'on s'intéresse au seul premier harmonique.

2.3.2 *Première conséquence*

Le flux d'enroulement à travers la phase a (resp. b, c) ne dépend que du premier harmonique de la distribution d'induction dans l'entrefer.

La composante radiale de l'induction dans l'entrefer, pour un régime de fonctionnement quelconque et à un instant donné, est nécessairement alternative, de période 2 π, et peut donc être décomposée en série de FOURIER :

$$B(\zeta) = B_1 \cos(\zeta - \beta_1) + B_2 \cos 2(\zeta - \beta_2) + B_3 \cos 3(\zeta - \beta_3) + \cdots \tag{5.11}$$

Le flux d'enroulement élémentaire dψ à travers les spires dont les conducteurs occupent un petit intervalle $d\zeta_0$ au droit des angles $\pm \zeta_0$ (fig. 5.3) a pour valeur

$$d\psi = N(\zeta_0)\, d\zeta_0 \int_{-\zeta_0}^{+\zeta_0} B(\zeta)\, RL\, d\zeta \tag{5.12}$$

R = rayon d'alésage de l'induit

L = longueur du circuit magnétique de l'induit soit, en utilisant (5.10) et (5.11)

$$d\psi = \left(\frac{4}{\pi} n'_s \sin \zeta_0\, d\zeta_0\right) \times 2\,RL \left[B_1 \sin \zeta_0 \cos \beta_1 + \frac{B_2}{2} \sin 2\,\zeta_0 \cos 2\,\beta_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{B_3}{3} \sin 3\,\zeta_0 \cos 3\,\beta_3 + \cdots \right]$$

or le flux d'enroulement ψ s'obtient en intégrant l'expression ci-dessus sur toute les spires, c'est-à-dire entre $\zeta_0 = 0$ et $\zeta_0 = \pi$. Seul le premier terme du crochet, $B_1 \sin \zeta_0 \cos \beta_1$, donne une contribution non nulle à cette intégrale (C.Q.F.D.) et d'autre part le flux s'écrit alors :

$$\psi = 4\,RLn'_s\,B_1 \cos \beta_1 \tag{5.13}$$

montrant que le flux est en outre proportionnel au cosinus de l'angle entre le maximum du fondamental de B et l'axe de l'enroulement considéré.

2.3.3 *Deuxième conséquence*

Les inductances propres et mutuelles relatives à l'induit seul sont la somme d'un terme constant et d'un harmonique de rang 2 ; le coefficient de ce dernier est le même pour les inductances propres et mutuelles.

Représentons figure 5.4 la phase *a*, le rotor dont l'axe O*d* occupe la position θ et dont les enroulements, inutiles ici, n'ont pas été représentés, et imaginons un enroulement *h* identique à *a* mais disposé sur l'induit à un angle α quelconque (O*a*, O*h* = α). Supposons *a* seul parcouru par un courant i_a. Il crée une f.m.m. à distribution sinusoïdale $F_a(\zeta)$ donnée par (5.8), et qui peut être remplacée par deux distributions sinusoïdales composantes, obtenues par projection sur O*d* et O*q* :

— une distribution sinusoïdale $F_{ad}(\zeta)$, ayant son maximum au droit de O*d*, et d'amplitude maximale :

$$F_{ad} = \frac{4}{\pi} n'_s\, i_a \cos \theta \tag{5.14}$$

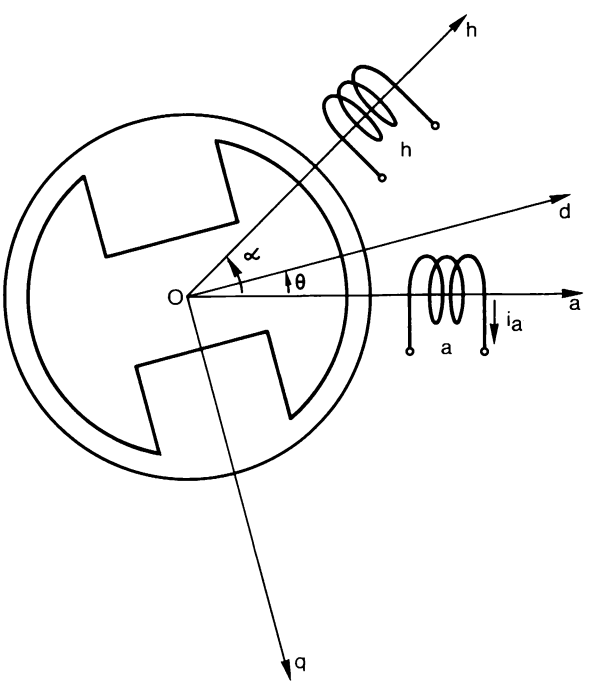


Fig. 5.4. — Illustration de la méthode de calcul des inductances propres et mutuelles de l'induit.

— une distribution sinusoïdale $F_{aq}(\zeta)$, ayant son maximum au droit de Oq, et d'amplitude maximale

$$F_{aq} = \frac{4}{\pi} n'_s i_a \sin\theta \tag{5.15}$$

$F_{ad}(\zeta)$, considérée isolément, crée une distribution d'induction dans l'entrefer $B_{ad}(\zeta)$ respectant les symétries par rapport aux axes Od et Oq. Pour évaluer le flux créé par $B_{ad}(\zeta)$ il suffit, en vertu de 2.3.2, de considérer le premier harmonique de la décomposition de $B_{ad}(\zeta)$, dont en outre l'amplitude maximale B_{ad} est située au droit de l'axe Od et est proportionnelle à F_{ad}, soit

$$B_{ad} = k_d F_{ad} .$$

Le même raisonnement s'applique à $F_{aq}(\zeta)$ à laquelle est associée $B_{aq}(\zeta)$ dont le fondamental a pour amplitude maximale

$$B_{aq} = k_q F_{aq}$$

($k_q < k_d$ lorsque la machine est effectivement à pôles saillants).

Le flux d'enroulement ψ_{ha} reçu par h et dû à a peut alors être obtenu comme somme des influences de $B_{ad}(\zeta)$ et $B_{aq}(\zeta)$ et, d'après le paragraphe 2.3.2 :

— influence de $B_{ad}(\zeta)$: proportionnelle à B_{ad} et à $\cos(\theta - \alpha)$;

— influence de $B_{aq}(\zeta)$: proportionnelle à B_{aq} et à $\sin(\theta - \alpha)$ et donc, d'après ce qui précède, k étant une constante :

$$\begin{aligned}\psi_{ha} &= k i_a [k_d \cos\theta \cos(\theta - \alpha) + k_q \sin\theta \sin(\theta - \alpha)] \\ &= k i_a \left[\frac{k_d + k_q}{2} \cos\alpha + \frac{k_d - k_q}{2} \cos(2\theta - \alpha)\right]\end{aligned}$$

donc l'inductance mutuelle entre a et h, et relative aux seules lignes d'induction traversant l'entrefer, est de la forme :

$$\mathcal{M}_{ha} = \frac{\psi_{ha}}{i_a} = M_{a0} \cos\alpha + M_{a2} \cos(2\theta - \alpha) .$$

L'inductance propre $\mathcal{L}_a$ de la phase a s'obtient en faisant $\alpha = 0$ et en ajoutant l'inductance de fuites l_a, supposée indépendante de θ :

$$\mathcal{L}_a = l_a + M_{a0} + M_{a2} \cos 2\theta$$

(et de façon analogue pour $\mathcal{L}_b$ et $\mathcal{L}_c$).

L'inductance mutuelle $\mathcal{M}_{ab}$ s'obtient en faisant $\alpha = 2\pi/3$ et en ajoutant l'inductance de fuites mutuelles m_{ab}, supposée indépendante de θ :

$$\mathcal{M}_{ab} = m_{ab} - \frac{1}{2} M_{a0} + M_{a2} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

(et de façon analogue pour $\mathcal{M}_{bc}$ et $\mathcal{M}_{ac}$) d'où il résulte :

— le coefficient d'harmonique 2 en θ est le même pour $\mathcal{L}_a$ et $\mathcal{M}_{ab}$ (et nous l'appellerons L_{a2}, au lieu de M_{a2}),

— les coefficients indépendants de θ, que nous appellerons L_{a0} et M_{ab0} seraient dans le rapport -2 si on ne tenait pas compte des fuites.

2.3.4 *Troisième conséquence*

L'inductance mutuelle entre un enroulement rotorique et une phase de l'induit suit une loi sinusoïdale en fonction de l'angle θ, dont le coefficient est le quotient, par le courant de l'enroulement rotorique considéré, du flux fondamental qu'il crée à travers la phase considérée.

Ceci résulte immédiatement de la première conséquence, mais elle nous permet d'écrire en particulier

$$\mathcal{M}_{af} = M_{af} \cos \theta$$

avec M_{af} = quotient du flux fondamental d'induit à vide par le courant inducteur qui le crée, paramètre classique de l'étude des machines synchrones en régime permanent.

On écrira de même :

$$\mathcal{M}_{aD} = M_{aD} \cos \theta$$
$$\mathcal{M}_{aQ} = M_{aQ} \sin \theta$$

M_{aD} et M_{aQ} étant définis de façon analogue à M_{af}, et cette définition étant en outre à la base de la méthode de calcul pratique de ces coefficients (méthode non développée ici).

2.4 Relations entre flux et courants compte tenu de l'hypothèse sinusoïdale

En définitive, les relations (5.7) sont explicitées en (5.16). Un certain nombre de coefficients sont fonction de l'angle θ. Cette circonstance compliquerait considérablement l'étude des régimes transitoires s'il n'était possible d'y remédier en opérant sur l'ensemble des grandeurs (tensions, courants, flux) un changement de variables simplifiant notablement les relations.

Ce changement de variables, appelé « transformation de PARK », [2] est suggéré par les symétries du circuit magnétique de la figure 5.1 par rapport aux axes d et q, et nous allons l'introduire en nous basant essentiellement sur des considérations physiques.

3 TRANSFORMATION DE PARK, OU DÉCOMPOSITION SELON LES DEUX AXES

3.1 Décomposition selon deux axes de la force magnétomotrice créée par le stator

Nous avons déjà considéré au paragraphe 2.3.3 la décomposition de la distribution sinusoïdale $F_a(\zeta)$ (5.8) en deux distributions composantes $F_{ad}(\zeta)$ et $F_{aq}(\zeta)$ d'amplitudes maximales (5.14) et (5.15).

Cette décomposition peut être étendue aux deux autres phases b et c et interprétée vectoriellement (fig. 5.5) :

La f.m.m. (5.8)

$$F_a(\zeta) = \frac{4}{\pi} n'_s i_a \cos \zeta$$

peut être représentée par un vecteur $\vec{F}_a$ colinéaire à Oa, d'amplitude $\frac{4}{\pi} n'_s i_a$.

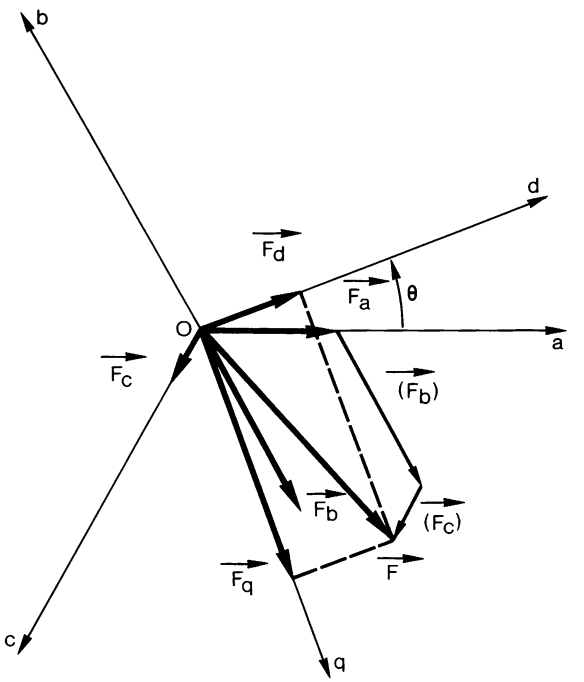


Fig. 5.5. — Décomposition selon les axes d et q de la force magnétomotrice triphasée.

Les f.m.m. créées par les courants i_b et i_c sont elles aussi à distribution sinusoïdale, leur maximum est dirigé respectivement suivant Ob et Oc ; elles peuvent donc être représentées par deux vecteurs $\vec{\mathbf{F}}_b$ et $\vec{\mathbf{F}}_c$ orientés selon ces axes et d'amplitudes respectivement $\frac{4}{\pi} n'_s i_b$ et $\frac{4}{\pi} n'_s i_c$.

(5.16)

$$
\begin{vmatrix}
\psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
L_{a0} + L_{a2} \cos 2\theta & M_{ab0} + L_{a2} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ab0} + L_{a2} \cos\left(2\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & M_{af} \cos\theta & M_{aD} \cos\theta & M_{aQ} \sin\theta \\
M_{ab0} + L_{a2} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{a0} + L_{a2} \cos\left(2\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & M_{ab0} + L_{a2} \cos 2\theta & M_{af} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{aD} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{aQ} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\
M_{ab0} + L_{a2} \cos\left(2\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & M_{ab0} + L_{a2} \cos 2\theta & L_{a0} + L_{a2} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{af} \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & M_{aD} \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & M_{aQ} \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\
M_{af} \cos\theta & M_{af} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{af} \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & L_{ff} & M_{fD} & 0 \\
M_{aD} \cos\theta & M_{aD} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{aD} \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & M_{fD} & L_{DD} & 0 \\
M_{aQ} \sin\theta & M_{aQ} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{aQ} \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & 0 & 0 & L_{QQ}
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_D \\ i_Q
\end{vmatrix}
$$

La force magnétomotrice résultante des trois phases a, b, c, somme des trois distributions sinusoïdales, est elle-même à distribution sinusoïdale en fonction de ζ ; son amplitude maximale et sa position à un instant donné sont donc obtenues

par addition des trois vecteurs $\vec{F}_a$, $\vec{F}_b$, $\vec{F}_c$ de la figure 5.5. Cette addition vectorielle peut aussi bien être réalisée en projetant les vecteurs sur deux axes perpendiculaires, et il est naturel de choisir pour cela les axes d et q qui sont des axes de symétrie géométrique pour la machine, et ce qui permettra en outre de combiner aisément avec la f.m.m. d'induit les f.m.m. créées par les enroulements rotoriques, qui respectent les mêmes symétries.

Les projections F_d et F_q de la f.m.m. résultante sur les axes Od et Oq ont donc pour valeur (voir fig. 5.5) :

$$(5.17)\qquad \begin{cases} F_d = \dfrac{4}{\pi} n'_s \left[i_a \cos\theta + i_b \cos\left(\theta - \dfrac{2\pi}{3}\right) + i_c \cos\left(\theta - \dfrac{4\pi}{3}\right)\right] \\ F_q = \dfrac{4}{\pi} n'_s \left[i_a \sin\theta + i_b \sin\left(\theta - \dfrac{2\pi}{3}\right) + i_c \sin\left(\theta - \dfrac{4\pi}{3}\right)\right] \end{cases}$$

qui représentent l'amplitude maximale des distributions sinusoïdales associées.

3.2 Transformation de PARK

C'est à partir de cette notion physique que va être défini le changement de variables. Remarquons tout d'abord que les deux équations ci-dessus ne sont pas résolubles en i_a, i_b, i_c (deux équations pour trois inconnues), et en effet *si on ajoute une même quantité à* i_a, i_b, i_c, F_d *et* F_q *sont inchangés.* Ceci doit être corrélé avec le fait connu que la composante homopolaire des courants ne participe pas à la création de la f.m.m. sinusoïdale d'entrefer et si on veut établir un changement de variable biunivoque, il faut introduire une troisième relation. Nous utiliserons désormais trois nouveaux courants $i_d i_q i_o$ liés à $i_a i_b i_c$ par la relation matricielle, dite « transformation de PARK » :

$$(5.18)\qquad \begin{vmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta - \dfrac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \dfrac{4\pi}{3}\right) \\ \sin\theta & \sin\left(\theta - \dfrac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \dfrac{4\pi}{3}\right) \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix}$$

Le coefficient 2/3 pour les composantes d et q a été choisi parce qu'il entraîne les relations les plus simples entre les valeurs numériques associées aux systèmes d, q, d'une part, a, b, c, d'autre part, des courants, tensions et flux, ainsi qu'on le verra au paragraphe 3.4 à propos du régime permanent synchrone. Il conduit en outre à des relations également simples lorsqu'on exprime les grandeurs en valeurs réduites, comme on le verra au chapitre VI. Le coefficient 1/3 pour la composante o a été choisi par analogie avec la composante homopolaire intervenant dans la méthode des composantes symétriques (il n'y a pas identité entre les deux composantes, car la méthode des composantes symétriques ne s'applique qu'aux grandeurs sinusoïdales).

En raison de leur commodité, ces coefficients introduits dès l'origine par PARK [2] ont été conservés préférentiellement dans la littérature technique.

Il faut cependant signaler que certains auteurs utilisent des coefficients rendant orthonormée la matrice (5.18). Pour celà il suffit d'y remplacer les coefficients 2/3 et 1/2 respectivement par $\sqrt{2/3}$ et $1/\sqrt{2}$. Ce choix plus élégant sur le plan théorique présente cependant un certain nombre d'inconvénients pratiques dont le principal est de se prêter très mal à une transcription en valeurs réduites, et c'est pourquoi il n'a jamais prévalu jusqu'ici.

Le changement de variables relatif aux tensions et aux flux est défini par la même transformation :

$$\begin{vmatrix} v_d \\ v_q \\ v_o \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \sin\theta & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{vmatrix} \tag{5.19}$$

$$\begin{vmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_o \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \sin\theta & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{vmatrix} \tag{5.20}$$

Si on appelle **A** la matrice des transformations ci-dessus, dite « matrice de PARK », soit :

$$\mathbf{A} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \sin\theta & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \tag{5.21}$$

la matrice inverse a pour valeur

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & 1 \end{vmatrix} \tag{5.22}$$

d'où les transformations inverses :

$$\begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \end{vmatrix} \tag{5.23}$$

$$(5.24)\qquad \begin{vmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} v_d \\ v_q \\ v_o \end{vmatrix}$$

$$(5.25)\qquad \begin{vmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_o \end{vmatrix}.$$

3.3 Interprétation physique

L'obtention de la transformation de PARK à partir de la décomposition des forces magnétomotrices conduit à interpréter cette transformation comme la substitution, aux enroulements de phases *a*, *b*, *c* dont les *conducteurs* et les *axes magnétiques* sont *immobiles* par rapport au stator, de deux enroulements *d* et *q*, dont les *axes magnétiques* sont solidaires du rotor et *tournent* avec lui. La représentation schématique de la figure 5.2 devient alors celle de la figure 5.6.

Cependant les *conducteurs* constituant les nouveaux enroulements doivent toujours être considérés comme *immobiles*, et de ce fait, les enroulements *d* et *q* sont tout à fait analogues à ceux de l'induit d'une machine à courant continu,

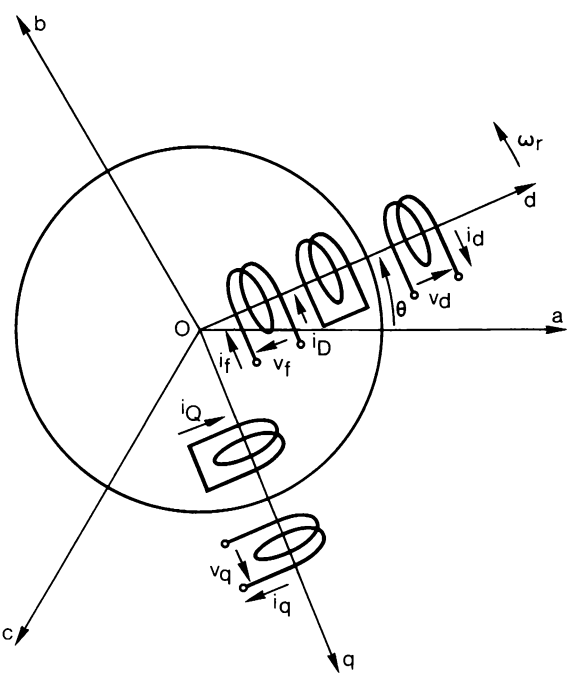


Fig. 5.6. — Interprétation physique de la transformation de PARK pour une machine synchrone.

telle par exemple que figure 2.2, à condition toutefois de permuter la disposition relative de l'inducteur et de l'induit, et la transformation de PARK peut être interprétée comme associant fictivement aux enroulements *abc* un collecteur immobile et des balais, tournant avec le rotor, et disposés selon l'axe O*d* et selon l'axe O*q*.

Il n'y a pas de représentation physique similaire pour la composante d'indice *o*, en raison du fait déjà rappelé qu'une composante homopolaire de courant crée une f.m.m. d'entrefer nulle.

3.4 Propriétés fondamentales en régime synchrone triphasé équilibré

Nous allons d'abord raisonner sur les courants.

En régime synchrone, la vitesse de rotation ω_r est appelée ω, égale à la pulsation des courants. L'angle θ s'écrit :

$$\theta = \omega t + \theta_0 \tag{5.26}$$

θ_0 caractérisant la position de l'axe *d* à l'instant 0, et les courants s'écrivent, I étant la valeur efficace :

$$\begin{cases} i_a = \mathrm{I}\sqrt{2}\cos(\omega t - \gamma) \\ i_b = \mathrm{I}\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \gamma - \dfrac{2\pi}{3}\right) \\ i_c = \mathrm{I}\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \gamma - \dfrac{4\pi}{3}\right). \end{cases} \tag{5.27}$$

Si on applique à ces trois courants le changement de variables (5.18), compte tenu de (5.27) il vient immédiatement :

$$\boxed{\begin{aligned} i_d &= \mathrm{I}\sqrt{2}\cos(\theta_0 + \gamma) \\ i_q &= \mathrm{I}\sqrt{2}\sin(\theta_0 + \gamma) \\ i_o &= 0 \end{aligned}} \tag{5.28}$$

i_d et i_q sont donc des *constantes* en régime triphasé équilibré, et seront notés I_d et I_q dans ce cas. Ce résultat peut s'interpréter très facilement dans le plan complexe (fig. 5.7). Les trois courants (5.27) peuvent être représentés par un même nombre complexe **I**, tournant à la vitesse ω dans le sens trigonométrique, et présentant à l'instant 0 un retard de phase γ par rapport à O*a*. Le courant dans chaque phase est donné à chaque instant par la projection de $\mathbf{I}\sqrt{2}$ sur les axes O*a*, O*b*, O*c*. Les courants I_d et I_q sont obtenus par projection de $\mathbf{I}\sqrt{2}$ sur les axes O*d* et O*q* tournant à la *même vitesse* ω que $\mathbf{I}\sqrt{2}$; ces projections sont donc des constantes faisant intervenir l'angle $\theta_0 + \gamma$. D'où les conséquences importantes :

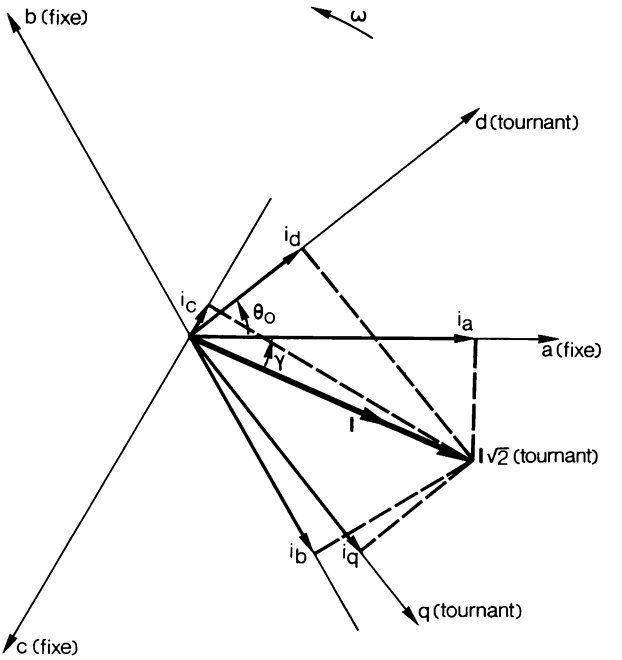


Fig. 5.7. — Interprétation des courants i_d et i_q en régime triphasé synchrone.

En régime synchrone triphasé équilibré :

1° Les courants i_d et i_q sont des constantes I_d et I_q.

2° Les courants I_d et I_q sont les projections du nombre complexe $\mathbf{I}\sqrt{2}$ sur les axes d et q.

3° L'amplitude des courants I_d et I_q correspond à la valeur crête des courants de phases puisque (5.28) entraîne $\sqrt{I_d^2 + I_q^2} = I\sqrt{2}$.

Les propriétés qui viennent d'être établies s'appliquent évidemment aux tensions et aux flux.

4 ÉQUATIONS ÉLECTRIQUES DANS LES AXES *d* ET *q*. ÉQUATIONS DE PARK

Revenons au cas général (régime quelconque) et appliquons le changement de variables défini par la matrice **A** (5.21) aux équations (5.3).

En notant $\mathbf{i}_{dqo}$, $\mathbf{v}_{dqo}$, $\boldsymbol{\psi}_{dqo}$, $\mathbf{i}_{abc}$, $\mathbf{v}_{abc}$, $\boldsymbol{\psi}_{abc}$ les matrices colonnes figurant au premier membre des relations (5.18) à (5.20) et (5.23) à (5.25) il vient :

$$\mathbf{v}_{dqo} = \mathbf{A}.\mathbf{v}_{abc} = -\mathbf{A}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\psi}_{abc} - R_a\,\mathbf{A}.\mathbf{i}_{abc}$$

puis, utilisant (5.23) et (5.25) :

$$(5.29)\quad \mathbf{v}_{dqo} = -\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\psi}_{dqo} - \mathbf{A}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}^{-1}\right)\boldsymbol{\psi}_{dqo} - \mathrm{R}_a\,\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{i}_{dqo}\,.$$

Or $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, et par un calcul simple on trouve :

$$\mathbf{A}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

d'où en développant les trois lignes de (5.29) et tenant compte de (5.2)

$$(5.30)\quad v_d = -\frac{\mathrm{d}\psi_d}{\mathrm{d}t} - \psi_q\,\omega_r - \mathrm{R}_a\,i_d$$

$$(5.31)\quad v_q = -\frac{\mathrm{d}\psi_q}{\mathrm{d}t} + \psi_d\,\omega_r - \mathrm{R}_a\,i_q \qquad .$$

$$(5.32)\quad v_o = -\frac{\mathrm{d}\psi_o}{\mathrm{d}t} - \mathrm{R}_a\,i_0$$

Ces trois équations sont appelées « équations de PARK ». Dans la plupart des applications on n'utilise que les deux premières qui sont, remarquons le, identiques aux deux dernières équations (2.10) relatives à l'induit de la machine à courant continu, ce qui confirme l'analogie signalée plus haut entre la transformation de PARK et un collecteur fictif.

Ces trois équations doivent être complétées par les équations (5.4), (5.5) et (5.6), non affectées par la transformation.

5 RELATIONS ENTRE FLUX ET COURANTS (COMPOSANTES *d, q, o)*

Il convient maintenant d'appliquer la transformation de PARK aux équations (5.16). Le calcul est assez long et nous allons en donner seulement le principe ; mais le résultat est tout à fait simple, il peut s'interpréter uniquement à l'aide de considérations physiques, et c'est surtout ce dernier aspect que nous développerons.

5.1 Principe et résultat du calcul

Pour obtenir, à partir du système (5.16), la matrice d'inductances reliant

$$\begin{vmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_o \\ \psi_f \\ \psi_\mathrm{D} \\ \psi_\mathrm{Q} \end{vmatrix} \quad \text{(notée } \boldsymbol{\psi}_{d6}\text{) à} \quad \begin{vmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \\ i_f \\ i_\mathrm{D} \\ i_\mathrm{Q} \end{vmatrix} \quad \text{(notée } \mathbf{i}_{d6}\text{)}$$

nous devons utiliser les matrices **A** (5.21) et $\mathbf{A}^{-1}$ (5.22), complétées à l'ordre 6 par adjonction de trois lignes et colonnes correspondant à la transformation identique puisque les courants, flux et tensions d'indices *f*, D, Q ne sont pas affectés par la transformation de PARK.

La matrice **A** donne donc naissance à la matrice **B** :

$$\mathbf{B} = \frac{2}{3}\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} \tag{5.33}$$

et la matrice $\mathbf{A}^{-1}$ donne naissance à la matrice $\mathbf{B}^{-1}$:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{5.34}$$

Appelant **L** la matrice carrée d'ordre 6 figurant dans (5.16) et ψ_{a6} et $\mathbf{i}_{a6}$ les matrices colonnes du même système, on peut écrire :

$$\psi_{d6} = \mathbf{B}.\psi_{a6} = \mathbf{B}.\mathbf{L}.\mathbf{i}_{a6} = \mathbf{B}.\mathbf{L}.\mathbf{B}^{-1}.\mathbf{i}_{d6}. \tag{5.35}$$

Lorsqu'on effecue le produit $\mathbf{B}.\mathbf{L}.\mathbf{B}^{-1}$ on trouve le résultat suivant

$$\begin{vmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_o \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_d & 0 & 0 & M_{af} & M_{aD} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & 0 & M_{aQ} \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}M_{af} & 0 & 0 & L_{ff} & M_{fD} & 0 \\ \frac{3}{2}M_{aD} & 0 & 0 & M_{fD} & L_{DD} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}M_{aQ} & 0 & 0 & 0 & L_{QQ} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{vmatrix} \tag{5.36}$$

avec

$$(5.37)\qquad \begin{cases} L_d = L_{a0} - M_{ab0} + \dfrac{3}{2} L_{a2} \\ L_q = L_{a0} - M_{ab0} - \dfrac{3}{2} L_{a2} \\ L_o = L_{a0} + 2\, M_{ab0}\,. \end{cases}$$

Le système (5.36) se décompose en trois systèmes indépendants :

$$(5.38)\qquad \begin{vmatrix} \psi_d \\ \psi_f \\ \psi_D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_d & M_{af} & M_{aD} \\ \dfrac{3}{2} M_{af} & L_{ff} & M_{fD} \\ \dfrac{3}{2} M_{aD} & M_{fD} & L_{DD} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_d \\ i_f \\ i_D \end{vmatrix}$$

$$(5.39)\qquad \begin{vmatrix} \psi_q \\ \psi_Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_q & M_{aQ} \\ \dfrac{3}{2} M_{aQ} & L_{QQ} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_q \\ i_Q \end{vmatrix}$$

$$(5.40)\qquad \psi_o = L_o\, i_o\,.$$

L'ensemble des équations (5.4), (5.5), (5.6), (5.30), (5.31), (5.32), (5.38), (5.39) et (5.40) permet d'étudier tous les régimes transitoires électriques de la machine synchrone, dans le cadre des hypothèses précisées au paragraphe 1.2; elles introduisent, notamment lorsque la perturbation considérée affecte les trois phases de façon équilibrée, une grande simplification par rapport au système (5.3) à (5.6) et (5.16) qui leur est équivalent.

5.2 Interprétation physique

Le fait que les trois systèmes magnétiques *d*, *q*, *o* soient devenus indépendants ((5.38) à (5.40)) résulte simplement de ce que le changement de variables défini par la matrice (5.21) diagonalise la matrice d'inductances propres et mutuelles de l'induit seul, c'est-à-dire la matrice déduite de (5.16) en conservant seulement les trois premières lignes et colonnes. (On aurait pu adopter cette démarche pour établir **A**, mais l'interprétation physique aurait été moins facile à saisir). Il faut noter ici que cette indépendance est restreinte au cadre de nos hypothèses notamment celles de distribution sinusoïdale de la f.m.m. d'induit et de non-saturation et doit donc être considérée comme une bonne approximation et non comme une propriété intrinsèque des armatures triphasées.

En premier lieu nous constatons la cohérence des équations (5.38) et (5.39) avec l'image physique de la figure 5.6 : les trois enroulements *d*, *f* et D ont leurs axes magnétiques alignés; leurs coefficients d'inductances propres et mutuelles sont donc des constantes; de même pour les deux enroulements *q* et Q, et par ailleurs il n'y a pas de couplage magnétique entre ces deux ensembles du fait que leurs axes magnétiques sont en quadrature.

Procédons alors à la définition directe et à l'interprétation physique des coefficients intervenant dans les équations (5.38) à (5.40), et montrons qu'on retrouve

bien ceux qui interviennent dans la théorie classique du régime permanent synchrone.

— L_d, inductance synchrone longitudinale, est définie comme le quotient $\frac{\psi_a}{i_a} = \frac{\psi_b}{i_b} = \frac{\psi_c}{i_c}$ lorsque seuls existent les courants d'induit et qu'ils créent une f.m.m. purement d'axe direct.

S'il en est ainsi, tous les courants de (5.36) sont nuls sauf i_d, d'où il résulte que des trois flux ψ_d, ψ_q, ψ_o, seul ψ_d est non nul et égal à $L_d\, i_d$. Or si on fait $i_q = i_o = 0$ et $\psi_q = \psi_o = 0$ dans une ligne quelconque, par exemple la première, de (5.23) et (5.25), on trouve :

$$i_a = i_d \cos\theta \quad \text{et} \quad \psi_a = \psi_d \cos\theta$$

d'où il résulte bien que, dans ces conditions correspondant à la définition de L_d, ψ_d/i_d est égal à ψ_a/i_a.

— L_q, inductance synchrone transversale, est définie comme le même quotient $\frac{\psi_a}{i_a} = \frac{\psi_b}{i_b} = \frac{\psi_c}{i_c}$ lorsque seuls existent les courants d'induit et qu'ils créent une f.m.m. purement d'axe en quadrature : il suffit de répéter le raisonnement ci-dessus, en ne conservant que i_q, pour montrer que dans ces conditions le quotient ψ_q/i_q est bien égal à ψ_a/i_a.

Signalons que la méthode pratique de calcul de L_d et L_q, qui ne sera pas traitée ici, est basée sur le raisonnement ci-dessus et non pas sur les formules (5.37) qui n'ont d'intérêt que théorique. Remarquons simplement, à propos de ces dernières, que si la machine est à entrefer constant, on retrouve la propriété connue de ces machines $L_d = L_q$.

— L_o, inductance homopolaire, est définie comme le quotient

$$\frac{\psi_a}{i_a} = \frac{\psi_b}{i_b} = \frac{\psi_c}{i_c}$$

lorsque seuls existent les courants d'induit et tels que $i_a = i_b = i_c$ (ce qui entraîne $\psi_a = \psi_b = \psi_c$ d'après (5.16)). En utilisant cette fois (5.18) et (5.20) on en déduit que le quotient ψ_o/i_o est bien égal, lui aussi, à ψ_a/i_a.

Par ailleurs, en utilisant un résultat du paragraphe 2.3.3, on remarque dans (5.37) que L_o ne fait intervenir que le flux de fuites de l'induit.

— L_{ff}, inductance propre de l'inducteur, apparaît bien dans (5.36) ou (5.38) comme le quotient ψ_f/i_f lorsque seul existe i_f.

On peut faire une constatation analogue à propos de

— L_{DD} : inductance propre de l'amortisseur d'axe direct
— L_{QQ} : inductance propre de l'amortisseur d'axe quadrature
— M_{fD} : inductance mutuelle entre l'inducteur et l'amortisseur d'axe direct.

Notons que ces quatre coefficients, relatifs à des enroulements situés seulement au rotor, ne sont pas concernés par l'hypothèse sinusoïdale et que leur calcul doit se faire à partir des formes d'onde réelles des distributions de f.m.m. et d'induction.

— M_{af}, inductance mutuelle entre l'inducteur et l'induit, est définie comme le quotient de $\psi_{a\max}$ par i_f lorsque seul existe i_f, $\psi_{a\max}$ étant le maximum de ψ_a,

premier harmonique du flux d'enroulement de la phase a. Or si seul existe i_f, d'après (5.36) ψ_q et ψ_o sont nuls, donc d'après la première ligne de (5.25) :

$$\psi_a = \psi_d \cos\theta\,, \qquad \psi_{a\max} = \psi_d$$

donc

$$\frac{\psi_d}{i_f} = \frac{\psi_{a\max}}{i_f} = M_{af}$$

et c'est bien cette valeur qui figure dans (5.36) ou (5.38).

Un raisonnement et une conclusion analogues s'appliquent à :

— M_{aD}, inductance mutuelle entre l'amortisseur d'axe direct et l'induit

— M_{aQ}, inductance mutuelle entre l'amortisseur d'axe en quadrature et l'induit.

Le fait que les inductances mutuelles M_{af}, M_{aD}, M_{aQ}, doivent être multipliées par 3/2 pour traduire la relation entre le courant i_d et les flux ψ_f et ψ_D, et entre le courant i_q et le flux ψ_Q (cf. (5.38) et (5.39)) provient du choix des coefficients de la transformation de PARK : du fait que ces coefficients conservent l'amplitude des courants triphasés lorsqu'on passe des grandeurs de phases aux grandeurs d'axes, les courants i_d et i_q se trouvent créer, en vertu du théorème de FERRARIS, une f.m.m. 3/2 fois plus grande que celle qui serait créée par un courant tel que i_a, i_b ou i_c pris individuellement.

6 PUISSANCE ET COUPLE

La puissance électrique instantanée aux bornes de la machine synchrone est :

$$P_e = v_a\, i_a + v_b\, i_b + v_c\, i_c \tag{5.41}$$

positive dans le fonctionnement en générateur (alternateur).

Remplaçant les quantités *abc* par *dqo* en utilisant la transformation de PARK, il vient

$$P_e = \frac{3}{2}(v_d\, i_d + v_q\, i_q + 2\, v_o\, i_o)\,. \tag{5.42}$$

Exprimons cette puissance en fonction des flux et des courants en utilisant les équations de PARK (5.30) à (5.32)

$$P_e = -\frac{3}{2}\left(i_d \frac{d\psi_d}{dt} + i_q \frac{d\psi_q}{dt} + 2\, i_o \frac{d\psi_o}{dt}\right) + \frac{3}{2}(\psi_d\, i_q - \psi_q\, i_d)\,\omega_r - \cdots \tag{5.43}$$

$$\cdots - \frac{3}{2} R_a (i_d^2 + i_q^2 + 2\, i_o^2)\,.$$

La première parenthèse représente la variation par unité de temps de l'énergie magnétique emmagasinée.

La deuxième parenthèse représente la puissance mécanique transformée en

puissance électrique à l'intérieur de la machine. Comme ω_r est la vitesse instantanée de rotation on en déduit l'expression du couple électromagnétique (résistant) C_e :

(5.44) $$\boxed{C_e = \frac{3}{2}(\psi_d\, i_q - \psi_q\, i_d)} \; .$$

La troisième parenthèse représente les pertes Joule dans l'induit.

Remarque : On peut aussi établir (5.44) directement à partir de l'expression générale (1.13) sous sa forme (1.14) et changée de signe pour obtenir un couple résistant. Le principe du calcul est le suivant, en utilisant les notations du paragraphe 5.1 :

$$C_e = -\frac{\partial W}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}(\mathbf{i}_{d6}^{t}.\boldsymbol{\psi}_{d6}) \, .$$

Seule la matrice **L** est concernée par la dérivation, d'où après passage aux grandeurs d'axes :

$$C_e = -\frac{1}{2}(\mathbf{B}^{-1}.\mathbf{i}_{d6})^t \frac{\partial}{\partial \theta}(\mathbf{L}).\mathbf{B}^{-1}.\mathbf{i}_{d6}$$

et le développement de ce calcul conduit bien à (5.44).

Le comportement électromécanique sera complété par l'équation du mouvement, rappelée en (1.22)

(5.45) $$\boxed{C_m - C_e = J\frac{d\omega_r}{dt}} \; .$$

7 CAS D'UNE MACHINE MULTIPOLAIRE

Comme cela a été expliqué au chapitre I, si on considère les angles électriques θ et la vitesse électrique ω_r, obtenus en multipliant leurs homologues géométriques et mécaniques par le nombre de paires de pôles p_1, les équations électriques sont inchangées, et les équations (5.44) et (5.45) deviennent :

(5.46) $$\boxed{C_e = \frac{3}{2}p_1(\psi_d\, i_q - \psi_q\, i_d)}$$

(5.47) $$\boxed{C_m - C_e = \frac{J}{p_1}\frac{d\omega_r}{dt}} \; .$$

8 CAS PARTICULIERS DE CONFIGURATIONS OU DE TRANSFORMATIONS

8.1 Système biphasé

Nous avons jusqu'ici supposé le bobinage d'induit triphasé, ce qui est le cas le plus fréquent ; il est possible d'établir le même type de transformation, mettant à profit les symétries du rotor, pour un nombre de phases quelconque au stator, mais le problème se complique rapidement pour les nombres de phases supérieurs à 3 (citons notamment l'étude [12] consacrée au bobinage pentaphasé).

Nous allons donner quelques indications relatives au cas du bobinage biphasé, en traitant par la même occasion la transformation triphasé-biphasé, souvent utilisée pour l'étude des régimes transitoires déséquilibrés.

8.1.1 *Transformation triphasé-biphasé*

Considérons figure 5.8*a* un enroulement triphasé (*a*, *b*, *c*), supposé disposé au stator. On peut lui substituer un enroulement biphasé (α, β), l'axe Oα étant confondu avec O*a*. La transformation s'obtient directement à partir de la transformation de PARK, en remplaçant simplement θ par 0 ; il convient donc ici encore d'ajouter une composante d'indice *o* pour compléter la définition des grandeurs et permettre l'inversion du système.

La transformation est la même pour les courants, les tensions et les flux ; elle s'écrit pour les courants par exemple :

$$\begin{vmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_o \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix} \tag{5.48}$$

et la transformation inverse :

$$\begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_o \end{vmatrix}. \tag{5.49}$$

Les composantes α, β, *o* sont appelées « Composantes de CLARKE » [3].

Il est facile de vérifier que si les courants *a*, *b*, *c* forment un système triphasé équilibré de pulsation ω et de valeur efficace I, soit de valeur crête $I\sqrt{2}$, les courants i_α et i_β forment un système biphasé équilibré de même pulsation et de même valeur crête $I\sqrt{2}$, le courant i_o étant nul.

8.1.2 *Passage du biphasé aux axes liés au rotor*

Partant d'un bobinage statorique biphasé tel que par exemple représenté figure 5.8*b*, on peut le remplacer par un ensemble de deux enroulements pseudo-stationnaires par rapport au rotor, dont les axes magnétiques O*d* et O*q* sont disposés, relativement au rotor, de la même manière que dans le cas triphasé étudié précédemment.

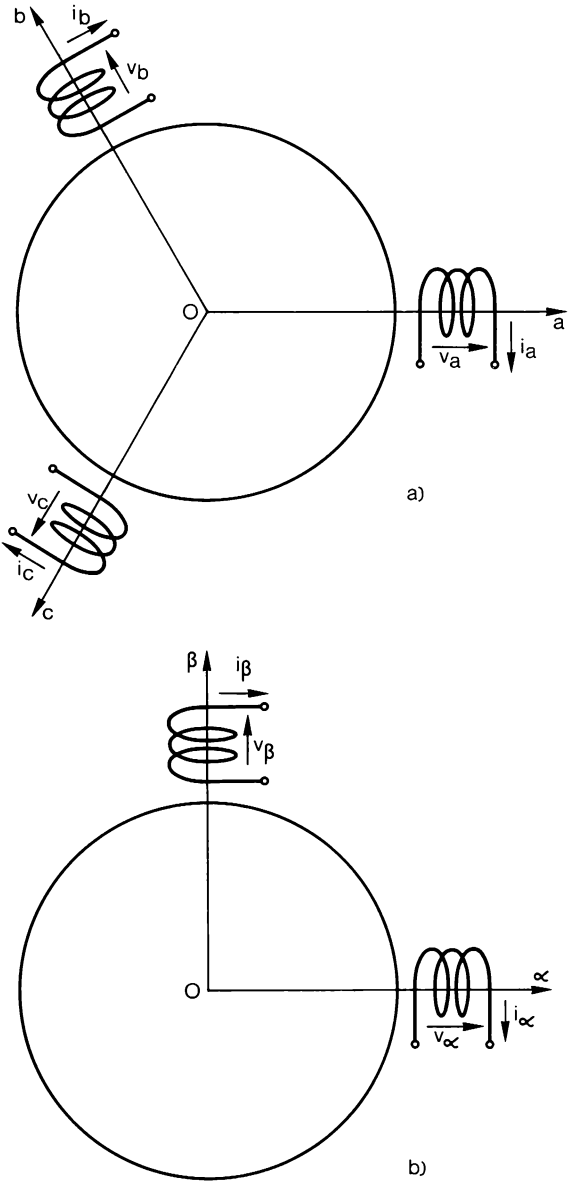


Fig. 5.8. — Interprétation physique des composants de CLARKE.

La transformation est la même pour les courants, les tensions et les flux ; on peut lui rajouter la composante d'indice o, invariante dans la transformation ; elle s'écrit, pour les courants, par exemple :

$$\begin{vmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_o \end{vmatrix} \tag{5.50}$$

et la transformation inverse

$$(5.51) \qquad \begin{vmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \end{vmatrix}.$$

Les transformations (5.50) et (5.51) peuvent donc être utilisées pour étudier commodément les régimes transitoires des machines synchrones biphasées. En particulier, elles conduisent exactement aux mêmes équations exprimées en grandeurs d'axes, à savoir (5.4) à (5.6), (5.30), (5.31), (5.38) (5.39), (5.44) et (5.45).

On remarque enfin que la transformation de PARK (5.18) est le produit des transformations (5.48) et (5.50), de même que son inverse (5.23) est le produit de (5.49) et (5.51).

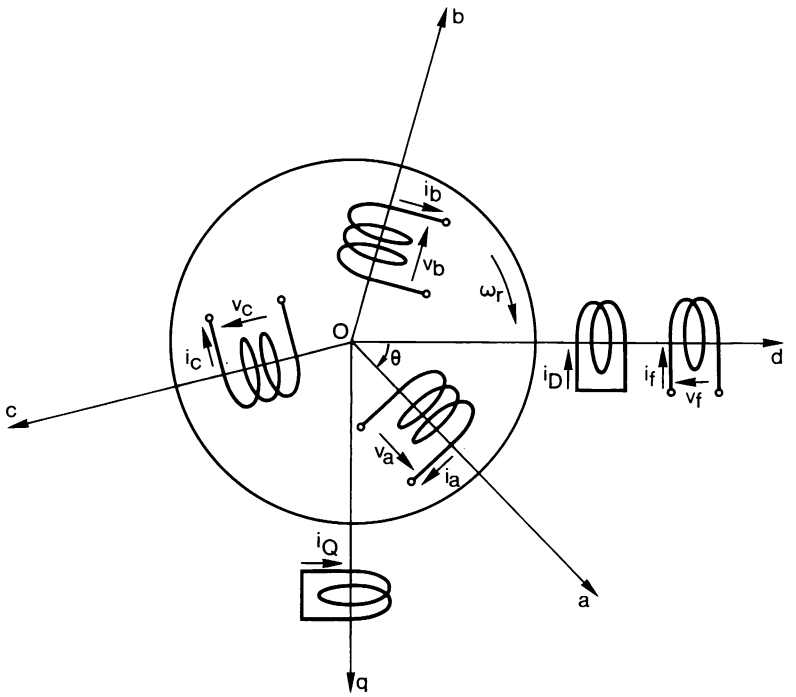
8.2 Configuration à inducteur fixe et induit tournant

Cette configuration, parfois rencontrée dans certaines machines synchrones, et représentée schématiquement figure 5.9*a*, peut être traitée exactement de la même manière que la configuration inverse et donner lieu aux mêmes équations, notamment en ce qui concerne les signes, à condition :

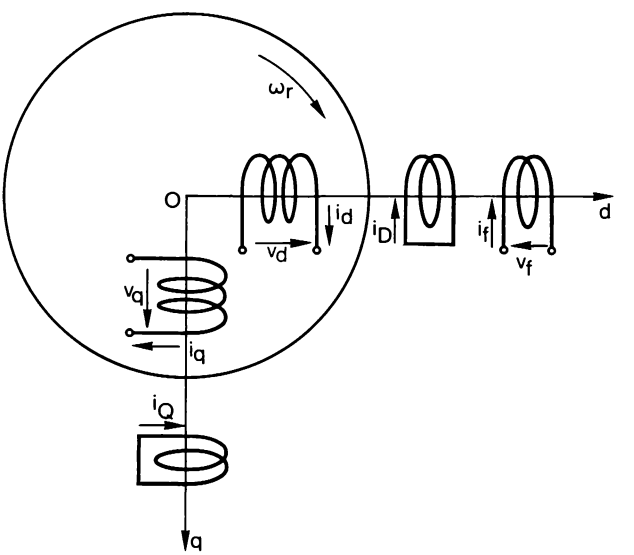
— de conserver les mêmes conventions de signes relatives aux grandeurs électriques et magnétiques ;

— de conserver pour les axes *d* et *q* la même orientation relative, mais d'adopter pour le comptage des angles et des vitesses le sens positif horaire (d'où la disposition des axes *a*, *b*, *c* correspondant à la succession de phases directe).

La représentation schématique avec les nouveaux enroulements *d* et *q* est alors celle de la figure 5.9*b*.



a)



b)

Fig. 5.9. — Machine synchrone triphasée à induit tournant et son image après transformation de PARK.

CHAPITRE VI

VALEURS RÉDUITES. RÉGIME PERMANENT SYNCHRONE

1 DÉFINITIONS ET UTILISATION DES VALEURS RÉDUITES DANS LE CAS DES MACHINES SYNCHRONES

1.1 Notion de valeur réduite ; intérêt dans le cas des régimes transitoires des machines synchrones

La notion de valeur réduite est associée à la notion de grandeurs nominales. Explicitons-la, par exemple, dans le cas d'un appareil triphasé, caractérisé par :

— la puissance apparente nominale S_n.

— la tension nominale entre phase et neutre (tension simple) V_n($V_n = U_n/\sqrt{3}$ si U_n est la tension nominale entre phases ou tension composée).

— le courant nominal I_n.

I_n est ici le courant de ligne, ou encore le courant du schéma étoilé équivalent, auquel on se réfèrera par la suite

On a
$$S_n = 3\, V_n\, I_n = U_n\, I_n \sqrt{3}$$

On introduit également l'« impédance nominale » $Z_n = \dfrac{V_n}{I_n}$.

L'impédance en valeur réduite z associée à une impédance Z du schéma étoilé équivalent, est le nombre sans dimension défini par :

$$z(\text{p.u.}) = \frac{Z}{Z_n} = \frac{ZI_n}{V_n}. \tag{6.1}$$

Le symbole « p.u. » couramment employé, venant de l'anglais « per unit » et pouvant s'énoncer « pour un ».

Comme conséquence de (6.1), z peut être interprété comme la chute de tension produite par le passage de I_n dans Z, rapportée à V_n (chute de tension relative).

Lors d'un régime triphasé équilibré, la tension simple ayant pour valeur efficace V, le courant ayant pour valeur efficace I, et la puissance apparente ayant pour valeur S, on peut définir de même :

$$i(\text{p.u.}) = \frac{I}{I_n} \tag{6.2}$$

$$v(\text{p.u.}) = \frac{V}{V_n} \tag{6.3}$$

$$s(\text{p.u.}) = \frac{S}{S_n}. \tag{6.4}$$

On constate que des relations telles que $V = ZI$, $S = 3\,VI$ s'écrivent en p.u. :

$$v = zi\,, \qquad s = vi\,.$$

La notion de valeurs réduites peut s'étendre aux régimes quelconques, c'est-à-dire aux valeurs instantanées des courants, tensions..., ainsi qu'à leurs diverses images mathématiques (nombres complexes, transformées de LAPLACE...) et c'est ce que nous ferons désormais. Mais dans ce cas on est amené à diviser chaque grandeur physique, pour la ramener en valeur réduite, non pas forcément par sa valeur nominale, mais par une valeur dite « de base » ; certaines valeurs de base peuvent être choisies arbitrairement (mais en fait elles seront choisies en considération de leur commodité) et d'autre part les valeurs de base dans leur ensemble ne sont pas indépendantes mais doivent respecter certaines règles de cohérence, notamment sur le plan de la conservation de l'énergie.

Les avantages de l'utilisation des valeurs réduites sont les suivants :

— l'utilisation des valeurs réduites supprime très souvent les coefficients numériques des équations (exemple $s = vi$ ci-dessus) ;

— les ordres de grandeurs des impédances en valeur réduite d'une famille de machines sont peu variables d'une machine à l'autre, si bien que l'utilisation des valeurs réduites permet de mieux apprécier et interpréter les similitudes comme les différences de comportement de ces machines ;

— les courants et les tensions, en valeurs réduites, fournissent rapidement une estimation de la sévérité des contraintes résultant du régime étudié ;

Dans le cas particulier des machines synchrones, on peut signaler deux arguments supplémentaires :

— l'utilisation des valeurs réduites facilite l'élaboration de schémas équivalents propres à aider la compréhension des phénomènes.

— toutes les applications de la théorie des deux axes sont traitées en valeurs réduites dans la littérature technique.

1.2 Grandeurs réduites relatives au stator

Nous définissons d'abord les valeurs réduites relatives aux grandeurs d'axes (d'indices d, q, o) puis celles relatives aux grandeurs de phases (a, b, c).

1.2.1 *Tensions, courants, puissances*

Les relations (5.28) montrent qu'en régime permanent synchrone, les valeurs nominales associées à i_d et i_q sont $I_n\sqrt{2}$; on choisira donc $I_n\sqrt{2}$ comme valeur de base pour le courant stator et on posera :

$$i_d(\text{p.u.}) = \frac{i_d(\text{A})}{I_n\sqrt{2}} \quad i_q(\text{p.u.}) = \frac{i_q(\text{A})}{I_n\sqrt{2}} \quad i_o(\text{p.u.}) = \frac{i_o(\text{A})}{I_n\sqrt{2}} \tag{6.5}$$

de même on choisira $V_n\sqrt{2}$ comme valeur de base d'où :

$$(6.6) \qquad v_d(\text{p.u.}) = \frac{v_d(\text{V})}{V_n\sqrt{2}} \quad v_q(\text{p.u.}) = \frac{v_q(\text{V})}{V_n\sqrt{2}} \quad v_o(\text{p.u.}) = \frac{v_o(\text{V})}{V_n\sqrt{2}}$$

en appelant I_n et V_n les valeurs nominales efficaces du courant de ligne et de la tension simple.

Les différentes puissances électriques (active, réactive, apparente) seront rapportées à $3\,V_n\,I_n$ d'où par exemple :

$$p_e(\text{p.u.}) = \frac{P_e(\text{W})}{3\,V_n\,I_n}$$

soit en utilisant (5.42), (6.5) et (6.6)

$$(6.7) \qquad p_e = v_d\,i_d + v_q\,i_q + 2\,v_o\,i_o\,.$$

1.2.2 *Flux et couple*

Nous conviendrons de conserver au temps sa dimension et son unité habituelle (la seconde). Alors il est naturel de définir les valeurs réduites des flux par référence à la tension nominale V_n soit :

$$(6.8) \qquad \psi_d(\text{p.u.}) = \frac{\psi_d(\text{Wb})}{V_n\sqrt{2}} \quad \psi_q(\text{p.u.}) = \frac{\psi_q(\text{Wb})}{V_n\sqrt{2}} \quad \psi_o(\text{p.u.}) = \frac{\psi_o(\text{Wb})}{V_n\sqrt{2}}$$

de sorte que ce seront les quantités $\omega\psi_d$ et $\omega\psi_q$ (ω étant la pulsation synchrone) qui seront, au régime nominal, de l'ordre de grandeur de l'unité, et non pas ψ_d et ψ_q (*).

Il est commode de définir le couple nominal par référence à la puissance apparente nominale :

$$C_n = \frac{3\,p_1\,V_n\,I_n}{\omega}$$

et le couple en valeur réduite par :

$$c_e(\text{p.u.}) = \frac{C_e(\text{N}m)}{C_n} \qquad c_m(\text{p.u.}) = \frac{C_m(\text{N}m)}{C_n}$$

soit pour c_e en utilisant (5.44), (6.5) et (6.8)

$$(6.9) \qquad c_e = \omega(\psi_d\,i_q - \psi_q\,i_d)\,.$$

1.2.3 *Valeurs réduites des grandeurs de phases*

Il est souhaitable, pour des raisons de commodité, que la transformation de PARK s'exprime avec les mêmes coefficients en valeurs réduites et en unités

(*) Il résulte de cette définition que les valeurs réduites des flux ont la dimension d'un temps ; il en sera de même pour les valeurs réduites des inductances.

physiques. Pour conserver les relations (5.18) à (5.25) en valeurs réduites, il est évidemment nécessaire d'adopter les mêmes valeurs de base pour les grandeurs de phases et pour les grandeurs d'axes, soit :

$$(6.10) \qquad i_a(\text{p.u.}) = \frac{i_a(\text{A})}{\text{I}_n\sqrt{2}} \quad v_a(\text{p.u.}) = \frac{v_a(\text{V})}{\text{V}_n\sqrt{2}} \quad \psi_a(\text{p.u.}) = \frac{\psi_a(\text{Wb})}{\text{V}_n\sqrt{2}}$$

et de même pour les phases *b* et *c*.

Grâce au coefficient 2/3 placé devant les transformations (5.18) à (5.20), les valeurs de base correspondent aux valeurs nominales associées naturellement aux valeurs instantanées, ce qui contribue notablement à la clarté et à la simplicité des différentes expressions, en valeurs physiques comme en valeurs réduites, correspondant au développement et aux résultats de calculs relatifs aux régimes permanents et transitoires.

Par exemple, en régime permanent synchrone, compte tenu de (6.2) et (6.10), (5.27) s'écrit

$$i_a(\text{p.u.}) = i\cos(\omega t - \gamma) \text{ ... etc.}$$

Par ailleurs, compte tenu de (6.5), (5.28) s'écrit :

$$(6.11) \qquad \begin{cases} i_d = i\cos(\theta_0 + \gamma) \\ i_q = i\sin(\theta_0 + \gamma) \end{cases}$$

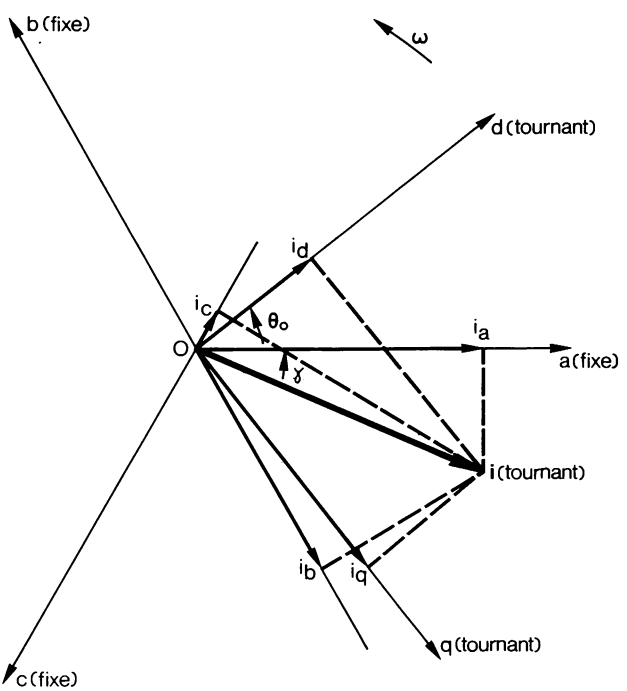


Fig. 6.1. — Interprétation des courants i_d et i_q, en valeurs réduites, en régime triphasé synchrone.

et le diagramme de la figure 5.7 devient, en valeurs réduites, celui de la figure 6.1.

Toujours en régime permanent synchrone (6.11) entraîne :

$$\sqrt{i_d^2 + i_q^2} = i . \tag{6.12}$$

On trouvera de même pour les tensions

$$\sqrt{v_d^2 + v_q^2} = v . \tag{6.13}$$

1.3 Valeurs réduites relatives aux autres enroulements

1.3.1 *Enroulement inducteur*

Aux grandeurs physiques i_f(A), v_f(V), ψ_f(Wb) doivent être associées les valeurs réduites i_f, v_f, ψ_f quotients des précédentes par les valeurs « de base » liées à I_n et V_n par des considérations d'équivalence magnétique et énergétique propres à permettre de ramener les différents enroulements à une même échelle numérique et d'obtenir des schémas équivalents commodes.

On définit le courant inducteur de base I_{fb} par son rapport avec la valeur de base adoptée pour les courants d'induit soit

$$\frac{I_{fb}}{I_n\sqrt{2}} = k_f \tag{6.14}$$

k_f, appelé coefficient d'équivalence des courants inducteur et induit, peut être choisi arbitrairement. Pratiquement on le choisira selon des critères de signification physique ou de simplification apportée aux équations ; mais une fois k_f choisi, V_{fb} est alors imposé par des considérations énergétiques.

La puissance électrique associée à v_d et i_d, par exemple, vaut en unités physiques, d'après (5.41)

$$P_e(W) = \frac{3}{2} v_d\, i_d .$$

La puissance électrique associée à v_f et i_f vaut :

$$P_f(W) = v_f\, i_f .$$

Ces deux puissances doivent être égales lorsque les différentes grandeurs ont leur valeur de base, soit $v_d = V_n\sqrt{2}$, $i_d = I_n\sqrt{2}$, $v_f = V_{fb}$, $i_f = I_{fb}$ d'où, compte tenu de (6.14)

$$\frac{V_{fb}}{V_n\sqrt{2}} = \frac{3}{2\,k_f} . \tag{6.15}$$

Exemples de choix de k_f

Le choix le plus naturel consiste à prendre I_{fb} tel qu'il produise le même fondamental de f.m.m. que le courant triphasé de valeur efficace I_n dans l'induit.

I_{fb} sera donc défini par l'égalité :

$$\frac{4}{\pi} n'_f\, I_{fb} = \frac{4}{\pi} \times \frac{3}{2} \times n'_s\, I_n\sqrt{2} \tag{6.16}$$

n'_f = nombre effectif de spires inductrices en série par pôle d'où :

$$k_f = \frac{I_{fb}}{I_n\sqrt{2}} = \frac{3\, n'_s}{2\, n'_f}. \tag{6.17}$$

On pourrait aussi choisir I_{fb} produisant le même fondamental non de f.m.m. mais d'induction ; pour obtenir ce fondamental les deux membres de (6.16) devraient être multipliés :

— pour une machine synchrone à entrefer constant par la même quantité, ce choix conduit donc à la même valeur de k_f (6.17) ;

— pour une machine à pôles saillants par des quantités différentes — mais cependant voisines —, ce qui conduirait à une valeur différente de k_f.

Cette question est étudiée en détail dans [5].

Les valeurs réduites sont alors telles que :

$$i_f(\text{p.u.}) = \frac{i_f(\text{A})}{I_{fb}} = \frac{i_f(\text{A})}{k_f\, I_n\sqrt{2}} \tag{6.18}$$

$$v_f(\text{p.u.}) = \frac{v_f(\text{V})}{V_{fb}} = \frac{2\, k_f\, v_f(\text{V})}{3\, V_n\sqrt{2}} \tag{6.19}$$

$$\psi_f(\text{p.u.}) = \frac{\psi_f(\text{Wb})}{V_{fb}} = \frac{2\, k_f\, \psi_f(\text{Wb})}{3\, V_n\sqrt{2}}. \tag{6.20}$$

1.3.2 *Enroulements amortisseurs*

Le principe est le même que pour l'enroulement inducteur.

On définit des courants de base I_{Db} et I_{Qb} d'où les coefficients d'équivalence

$$k_D = \frac{I_{Db}}{I_n\sqrt{2}} \qquad k_Q = \frac{I_{Qb}}{I_n\sqrt{2}}. \tag{6.21}$$

Le choix de I_{Db} et I_{Qb} n'est pas imposé ; on peut par exemple les définir à partir de relations similaires à (6.16) en y remplaçant $n'_f\, I_{fb}$ par $n'_D\, I_{Db}$ et $n'_Q\, I_{Qb}$ respectivement, n'_D et n'_Q étant les nombres effectifs de spires d'amortisseurs. Les tensions de base et les valeurs réduites sont alors définies par les relations suivantes, analogues à (6.15), (6.18) et (6.20)

$$\frac{V_{Db}}{V_n\sqrt{2}} = \frac{3}{2\, k_D} \qquad \frac{V_{Qb}}{V_n\sqrt{2}} = \frac{3}{2\, k_Q} \tag{6.22}$$

$$i_D(\text{p.u.}) = \frac{i_D(\text{A})}{k_D\, I_n\sqrt{2}} \qquad i_Q(\text{p.u.}) = \frac{i_Q(\text{A})}{k_Q\, I_n\sqrt{2}} \tag{6.23}$$

$$\psi_D(\text{p.u.}) = \frac{2\, k_D\, \psi_D(\text{Wb})}{3\, V_n\sqrt{2}} \qquad \psi_Q(\text{p.u.}) = \frac{2\, k_Q\, \psi_Q(\text{Wb})}{3\, V_n\sqrt{2}}. \tag{6.24}$$

1.4 Définition des résistances et inductances en valeurs réduites ; écriture de l'ensemble des équations

1.4.1 *Résistance de l'induit ; équations de PARK*

On pose naturellement, conformément à (6.1)

$$r_a = \frac{R_a I_n}{V_n} \tag{6.25}$$

et, compte tenu de (6.5), (6.6) et (6.8), les équations (5.30) à (5.32) s'écrivent en p.u. :

$$\boxed{\begin{aligned} v_d &= -\frac{d\psi_d}{dt} - \psi_q \omega_r - r_a i_d \qquad (6.26)\\ v_q &= -\frac{d\psi_q}{dt} + \psi_d \omega_r - r_a i_q \qquad (6.27)\\ v_o &= -\frac{d\psi_o}{dt} - r_a i_o \qquad (6.28) \end{aligned}}$$

1.4.2 *Résistance des autres enroulements ; équations électriques*

Les résistances en valeurs réduites sont telles que :

$$r_f = \frac{R_f I_{fb}}{V_{fb}} \quad r_D = \frac{R_D I_{Db}}{V_{Db}} \quad r_Q = \frac{R_Q I_{Qb}}{V_{Qb}} \tag{6.29}$$

soit, compte tenu des relations établies ci-dessus au paragraphe 1.3 :

$$r_f = \frac{2 k_f^2 R_f I_n}{3 V_n} \quad r_D = \frac{2 k_D^2 R_D I_n}{3 V_n} \quad r_Q = \frac{2 k_Q^2 R_Q I_n}{3 V_n}$$

d'où l'écriture en p.u. des équations (5.4) à (5.6)

$$\boxed{\begin{aligned} v_f &= r_f i_f + \frac{d\psi_f}{dt} \qquad (6.30)\\ 0 &= r_D i_D + \frac{d\psi_D}{dt} \qquad (6.31)\\ 0 &= r_Q i_Q + \frac{d\psi_Q}{dt} \qquad (6.32) \end{aligned}}$$

1.4.3 *Inductances propres et mutuelles ; équations magnétiques*

En raison de la conservation de la dimension et de l'unité relatives au temps, les valeurs réduites des inductances propres et mutuelles seront définies comme le quotient du flux dû au courant de base, par la tension de base. On aura donc :

(6.33)
$$l_d = \frac{L_d I_n}{V_n} \qquad l_q = \frac{L_q I_n}{V_n} \qquad l_o = \frac{L_o I_n}{V_n}$$

$$l_{ff} = \frac{L_{ff} I_{fb}}{V_{fb}} \qquad l_{DD} = \frac{L_{DD} I_{Db}}{V_{Db}} \qquad l_{QQ} = \frac{L_{QQ} I_{Qb}}{V_{Qb}}$$

(6.34)
$$l_{ff} = \frac{2 k_f^2 L_{ff} I_n}{3 V_n} \qquad l_{DD} = \frac{2 k_D^2 L_{DD} I_n}{3 V_n} \qquad l_{QQ} = \frac{2 k_Q^2 L_{QQ} I_n}{3 V_n}$$

$$m_{af} = \frac{M_{af} I_{fb}}{V_n \sqrt{2}} \qquad m_{aD} = \frac{M_{aD} I_{Db}}{V_n \sqrt{2}} \qquad m_{fD} = \frac{M_{fD} I_{Db}}{V_{fb}}$$

(6.35)
$$m_{af} = \frac{k_f M_{af} I_n}{V_n} \qquad m_{aD} = \frac{k_D M_{aD} I_n}{V_n} \qquad m_{fD} = \frac{2 k_f k_D M_{fD} I_n}{3 V_n}$$

(6.36)
$$m_{aQ} = \frac{k_Q M_{aQ} I_n}{V_n}.$$

Les relations (5.38), (5.39) et (5.40) s'écrivent alors, en utilisant les définitions ci-dessus des flux, courants et inductances en valeurs réduites :

(6.37)
$$\begin{vmatrix} \psi_d \\ \psi_f \\ \psi_D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_d & m_{af} & m_{aD} \\ m_{af} & l_{ff} & m_{fD} \\ m_{aD} & m_{fD} & l_{DD} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_d \\ i_f \\ i_D \end{vmatrix}$$

(6.38)
$$\begin{vmatrix} \psi_q \\ \psi_Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_q & m_{aQ} \\ m_{aQ} & l_{QQ} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_q \\ i_Q \end{vmatrix}$$

(6.39)
$$\psi_o = l_o i_o$$

1.4.4 *Grandeurs et équation mécaniques*

Au paragraphe 1.2.2 nous avons introduit une définition du couple nominal, commode pour l'emploi des valeurs réduites. Il en est résulté l'expression (6.9) du couple électromagnétique :

(6.9)
$$c_e = \omega(\psi_d i_q - \psi_q i_d).$$

Divisant les deux membres de l'équation (5.46) par C_n, nous sommes amenés à introduire la « constante d'énergie cinétique » H :

$$\text{(6.40)} \qquad \boxed{\mathrm{H} = \frac{1}{2}\mathrm{J}\left(\frac{\omega}{p_1}\right)^2 \Big/ \mathrm{S}_n(s)}$$

quotient de l'énergie cinétique emmagasinée à la vitesse nominale, par la puissance apparente nominale. Il vient alors, pour l'équation mécanique :

$$\text{(6.41)} \qquad \boxed{c_m - c_e = \frac{2\,\mathrm{H}}{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\omega_r}{\mathrm{d}t}}\,.$$

N.B. : Une grandeur davantage utilisée par les mécaniciens est le « Temps d'accélération nominal » $\mathrm{T_J}$, temps nécessaire pour amener les masses tournantes à leur vitesse nominale, en leur appliquant un couple constant égal au quotient de la puissance active nominale par la vitesse nominale. On a alors pour une machine électrique quelconque la relation de définition :

$$\text{(6.42)} \qquad \mathrm{T_J} = \mathrm{J}\Omega_n^2/\mathrm{P}_n$$

et pour une machine synchrone ($\Omega_n = \omega/p_1$) la relation :

$$\mathrm{T_J} = \frac{2\,\mathrm{H}}{\cos\varphi_n}\,.$$

2 RÉGIME PERMANENT SYNCHRONE

2.1 Equations générales

Nous avons déjà constaté au chapitre V, paragraphe 3.4, qu'en régime permanent synchrone, caractérisé par

$$\text{(6.43)} \qquad \omega_r = \omega$$

$$\text{(6.44)} \qquad \theta = \omega t + \theta_0$$

et par le fait que les tensions, courants, flux de l'induit forment des systèmes triphasés équilibrés de pulsation ω, les grandeurs d'indices d et q sont des constantes et les grandeurs d'indice o sont nulles.

Ces propriétés se retrouvent bien entendu en valeurs réduites, et les équations du paragraphe 1.4 ci-dessus se simplifient et deviennent :

$$\text{(6.45)} \qquad \begin{cases} v_d = -\psi_q\,\omega - r_a\,i_d \\ v_q = \psi_d\,\omega - r_a\,i_q \\ v_f = r_f\,i_f \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_d = l_d\, i_d + m_{af}\, i_f \\ \psi_q = l_q\, i_q\,. \end{cases} \tag{6.46}$$

(Pour le lecteur non familier avec l'usage des valeurs réduites, nous avons reporté en fin de chapitre, écrites en grandeurs physiques, un certain nombre des relations qui vont suivre ; la correspondance entre les deux jeux de relations résulte des définitions adoptées dans la première partie de ce chapitre.)

2.2 Fonctionnement à vide ($i_d = i_q = 0$)

Il vient :

$$\begin{cases} v_d = 0 \\ v_q = m_{af}\, \omega i_f\,. \end{cases} \tag{6.47}$$

Nous posons d'une manière générale

$$e = m_{af}\, \omega i_f \tag{6.48}$$

e est la valeur réduite de la f.é.m. interne.

La relation (6.48) traduit la caractéristique à vide non saturée, en valeurs réduites ; en général i_f n'est pas égal à 1 lorsque $e = 1$; cette question sera éclaircie au chapitre X, paragraphe 3.

Enfin il résulte de (6.47) que e est une grandeur purement d'axe en quadrature.

2.3 Fonctionnement en charge ; utilisation des nombres complexes ; diagramme de BLONDEL

En posant :

$$x_d = l_d\, \omega, \textit{ réactance synchrone longitudinale}$$

$$x_q = l_q\, \omega, \textit{ réactance synchrone transversale,}$$

il vient en combinant (6.45), (6.46) et (6.48) :

$$\begin{cases} v_d = -\, x_q\, i_q - r_a\, i_d \\ v_q = e + x_d\, i_d - r_a\, i_q\,. \end{cases} \tag{6.49}$$

Nous nous proposons de transformer ces relations par l'utilisation des nombres complexes, de façon à retrouver les relations classiques traduisant le fonctionnement en charge des machines synchrones à pôles saillants, représentées dans le plan complexe par le diagramme de BLONDEL. Nous allons pour celà utiliser la propriété des grandeurs d'axes d et q d'être, en régime synchrone, les projections des vecteurs tournants du plan complexe.

Il suffit d'observer la figure 6.1, ou encore d'appliquer (5.23) ou (5.24) pour écrire le courant et la tension d'une phase quelconque, sous la forme suivante, appliquée par exemple à la phase a, avec $\theta = \omega t + \theta_0$

$$(6.50)\qquad \begin{cases} i_a = i_d \cos(\omega t + \theta_0) + i_q \sin(\omega t + \theta_0) \\ v_a = v_d \cos(\omega t + \theta_0) + v_q \sin(\omega t + \theta_0) \\ e_a = e \sin(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

(la dernière relation résultant du fait que e est une grandeur d'axe q). i_d, i_q, v_d, v_q, e et ω étant des constantes, les équations (6.50), explicitant les lois sinusoïdales suivies par i_a, v_a, e_a, permettent d'étendre aux grandeurs d'axes la représentation complexe.

L'association de nombres complexes aux grandeurs sinusoïdales telles que figurant dans (6.50) est basée sur la propriété :

$$y(t) = a \cos(\omega t + b) = \mathcal{R}\mathrm{e}\ \{ a\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + b)} \}$$

de sorte que la fonction y est représentée dans le plan complexe par le nombre $\mathbf{y} = a\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}b}$ associé à l'opérateur $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$. Les relations (6.50) nous conduisent donc à introduire les nombres complexes :

$$(6.51)\qquad \begin{cases} \mathbf{i}_d = i_d\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0} \\ \mathbf{i}_q = -\,\mathrm{j} i_q\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0} \\ \mathbf{v}_d = v_d\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0} \\ \mathbf{v}_q = -\,\mathrm{j} v_q\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0} \\ \mathbf{e} = -\,\mathrm{j} e\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0}. \end{cases}$$

Il résulte de (6.50) et (6.51) que :

1° Les nombres complexes $\mathbf{i}_q$, $\mathbf{v}_q$, $\mathbf{e}$ sont tous parallèles et $\mathbf{i}_d$ et $\mathbf{v}_d$ sont en quadrature par rapport à eux.

2° Sachant qu'en valeurs réduites i_a et v_a ont pour module i et v, les nombres complexes $\mathbf{i}$ et $\mathbf{v}$ associés sont tels que :

$$(6.52)\qquad \begin{cases} \mathbf{i} = \mathbf{i}_d + \mathbf{i}_q \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_d + \mathbf{v}_q \end{cases}$$

(*Remarque* : A partir de (6.52) on retrouve les relations (6.12) et (6.13) :

$$\begin{cases} i = \sqrt{i_d^2 + i_q^2} \\ v = \sqrt{v_d^2 + v_q^2} \end{cases}$$

et au régime nominal les deux membres de ces relations valent 1.)

Multipliant alors la première ligne de (6.49) par $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0}$, la deuxième par $-\,\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0}$ et ajoutant membre à membre, il vient, en utilisant (6.52) :

$$(6.53)\qquad \boxed{\mathbf{e} = \mathbf{v} + r_a \mathbf{i} + \mathrm{j} x_q \mathbf{i} + \mathrm{j}(x_d - x_q)\mathbf{i}_d}$$

équation conduisant à la construction du diagramme de BLONDEL (fig. 6.2).

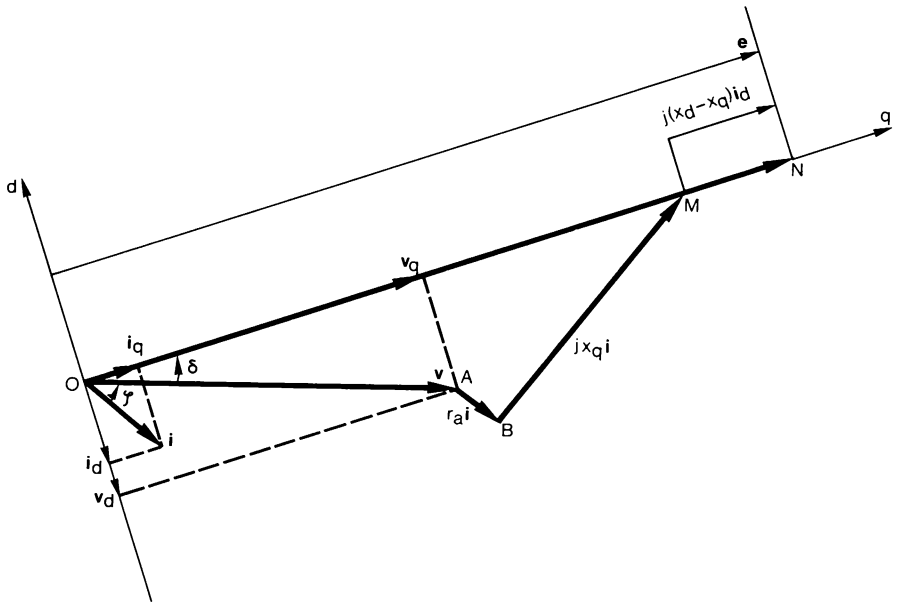


Fig. 6.2. — Diagramme de BLONDEL, en valeurs réduites.

Supposant **v** et **i** connus, et adoptant **v** comme origine des phases, nous pouvons construire

$$\mathbf{OM} = \mathbf{v} + r_a\,\mathbf{i} + \mathrm{j}x_q\,\mathbf{i}$$

dont on sait d'après (6.53) qu'il est dirigé selon l'axe Oq (puisque **e** et $\mathbf{j}i_d$ le sont).

On positionne alors Od et on peut projeter **i** et **v** sur les deux axes, ce qui permet de compléter le diagramme grâce à la connaissance de $\mathbf{i}_d$.

Remarque : La construction graphique est facilitée si, après avoir déterminé la position de l'axe q, on réécrit (6.53) sous la forme

$$\mathbf{e} = \mathbf{v} + r_a\,\mathbf{i} + \mathrm{j}x_d\,\mathbf{i} - \mathrm{j}(x_d - x_q)\,\mathbf{i}_q\,. \tag{6.54}$$

Il suffit alors de prolonger $\mathrm{j}x_q\,\mathbf{i}$ en $\mathrm{j}x_d\,\mathbf{i}$ puis de projeter sur Oq l'extrémité de ce dernier vecteur.

L'angle $(\mathbf{v}, \mathbf{e}) = \delta$ est *l'angle interne*, et on remarque que :

$$\begin{cases} v_d = -\,v \sin\delta \\ v_q = \quad v \cos\delta\,. \end{cases} \tag{6.55}$$

Une conséquence pratique très intéressante de ce qui précède est que, pour l'étude des régimes transitoires consécutifs à une perturbation survenant à partir d'un régime permanent synchrone, les valeurs initiales des variables d'indices d et q (tensions, courants, flux) se déduisent directement de la construction du diagramme de BLONDEL.

En outre, ces valeurs initiales étant des constantes, les régimes transitoires pour lesquelles les conditions d'application de la transformation de LAPLACE

se trouvent remplies pourront être avantageusement traités par la méthode de superposition (voir chapitre III, § 2).

Dans le cas d'une machine à entrefer constant, $x_d = x_q$, l'équation (6.53) et le diagramme figure 6.2 se simplifient.

2.4 Puissance électrique

L'expression (6.7) de la puissance électrique devient

$$p_e = v_d\, i_d + v_q\, i_q$$

qui sera bien interprétée, en régime permanent synchrone, comme le produit scalaire des vecteurs associés à **v** et **i**, et qui s'écrit aussi, dans ce cas :

$$p_e = \frac{\mathrm{P}_e}{3\,\mathrm{V}_n\,\mathrm{I}_n} = vi\cos\varphi\,.$$

2.5 Couple. Couple synchronisant : stabilité en régime permanent

A partir de l'expression (6.9) du couple, nous allons établir, en régime permanent, une expression qui fera intervenir seulement :

— les paramètres de la machine (x_d, x_q, p_1)

— les conditions extérieures appliquées (pulsation ω, tension aux bornes v, f.é.m. interne e, elle-même fonction de i_f)

— l'angle interne δ.

Pour cela nous négligeons la résistance du stator r_a, généralement très faible. Les équations (6.45) et (6.49) deviennent :

$$\text{(6.56)} \qquad \begin{cases} v_d = -\psi_q\,\omega = -x_q\, i_q \\ v_q = \psi_d\,\omega = e + x_d\, i_d\,. \end{cases}$$

Les équations (6.55) et (6.56) permettent alors d'exprimer ψ_d, ψ_q, i_d, i_q en fonction des seules grandeurs annoncées ; en les reportant dans (6.9) il vient :

$$\text{(6.57)} \qquad \boxed{c_e = \frac{ev}{x_d}\sin\delta + \frac{v^2}{2}\sin 2\delta\left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d}\right)}\,.$$

Pour v et e donnés, c_e est une fonction de l'angle interne δ représentée sur la figure 6.3. Les valeurs positives correspondent au fonctionnement en alternateur, et les valeurs négatives au fonctionnement en moteur.

Dans le cas des machines à pôles saillants, $x_q < x_d$, le maximum a lieu pour un angle inférieur à $\pi/2$. Dans le cas des machines à entrefer constant, $x_d = x_q$ et la courbe est une sinusoïde pure.

Considérons le fonctionnement en alternateur. Pour une valeur du couple moteur c_m (indépendant de δ), il y a deux points de fonctionnement A et B. Pour

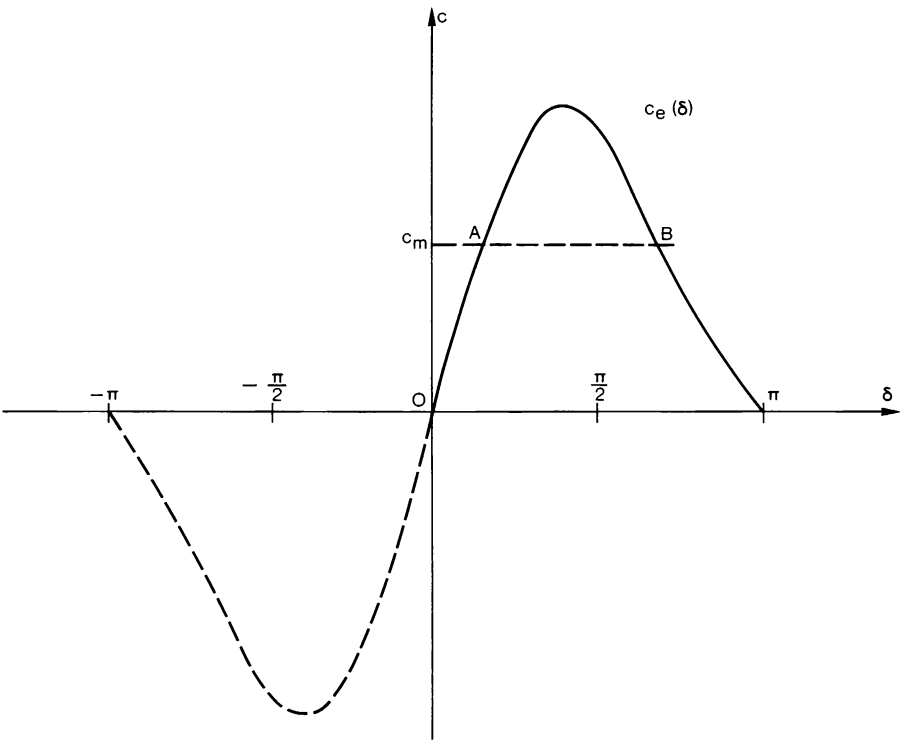


Fig. 6.3. — Courbe du couple d'une machine synchrone en fonction de l'angle interne.

qu'un fonctionnement soit stable, il faut qu'en cas d'accroissement de δ (supposé très lent pour que les conditions de régime permanent restent respectées), c_e devienne supérieur à c_m pour exercer un effet ralentisseur tendant à ramener δ à sa valeur initiale. La condition de stabilité en régime permanent (c'est-à-dire correspondant à des variations très lentes), s'écrit donc :

$$c_s = \frac{\mathrm{d}c_e}{\mathrm{d}\delta} > 0 .$$

La quantité c_s s'appelle *coefficient de couple synchronisant* et a pour valeur, d'après (6.57) :

$$c_s = \frac{ev}{x_d} \cos \delta + v^2 \cos 2\delta \left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right). \tag{6.58}$$

La condition $c_s > 0$ correspond évidemment à la partie montante de la courbe figure 6.3 et sa valeur numérique caractérise le degré de stabilité au régime considéré. Le fonctionnement au point A est stable, au point B instable.

Le raisonnement simpliste qui vient d'être fait ne constitue qu'une première approximation. L'étude sérieuse de la stabilité en régime permanent et des paramètres pouvant l'influencer passe nécessairement par l'analyse des petites perturbations, faisant intervenir les paramètres transitoires.

2.6 Equations relatives au régime permanent synchrone, exprimées en unités physiques

Ces relations sont obtenues à partir des relations homologues en valeurs réduites, et en utilisant les relations de définition de celles-ci, exposées au début du chapitre. En ce qui concerne les équations électriques, il suffit en pratique de considérer que les grandeurs d'axes sont associées aux valeurs crête de grandeurs de phases, c'est-à-dire à leurs valeurs efficaces multipliées par $\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} V_d = 0 \\ V_q = M_{af}\,\omega I_f \end{cases} \tag{6.59}$$

$$E\sqrt{2} = M_{af}\,\omega I_f \tag{6.60}$$

$$\begin{cases} V_d = -X_q I_q - R_a I_d \\ V_q = E\sqrt{2} + X_d I_d - R_a I_q \end{cases} \tag{6.61}$$

$$\begin{cases} i_a = I_d \cos(\omega t + \theta_0) + I_q \sin(\omega t + \theta_0) \\ v_a = V_d \cos(\omega t + \theta_0) + V_q \sin(\omega t + \theta_0) \\ e_a = E\sqrt{2} \sin(\omega t + \theta_0) \end{cases} \tag{6.62}$$

$$\begin{cases} \mathbf{I}\sqrt{2} = \mathbf{I}_d + \mathbf{I}_q \\ \mathbf{V}\sqrt{2} = \mathbf{V}_d + \mathbf{V}_q \end{cases} \tag{6.63}$$

$$\mathbf{E}\sqrt{2} = \mathbf{V}\sqrt{2} + R_a \mathbf{I}\sqrt{2} + jX_q \mathbf{I}\sqrt{2} + j(X_d - X_q)\mathbf{I}_d \tag{6.64}$$

$$\begin{cases} V_d = -V\sqrt{2} \sin \delta \\ V_q = V\sqrt{2} \cos \delta \end{cases} \tag{6.65}$$

et le diagramme de la figure 6.2 se présente sous la forme de la figure 6.4.

$$C_e = \frac{p_1}{\omega} \left[\frac{3\,EV}{X_d} \sin \delta + \frac{3\,V^2}{2} \sin 2\delta \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \right]. \tag{6.66}$$

En outre on pourra vérifier qu'entre E et e (6.48) existe la relation, similaire à (6.3)

$$e(\text{p.u.}) = \frac{E}{V_n}. \tag{6.67}$$

3 APPLICATION A LA MESURE DES RÉACTANCES SYNCHRONES

A titre d'illustration du paragraphe 2, nous allons exposer sommairement le principe de quelques méthodes de mesure des réactances synchrones x_d et x_q. La définition de ces grandeurs étant basée sur l'hypothèse de non-saturation, ces essais doivent toujours être effectués avec des valeurs de tension aux bornes (v) ou de courant d'excitation (i_f) suffisamment faibles. En outre nous supposerons que la résistance r_a peut être négligée devant x_d et x_q.

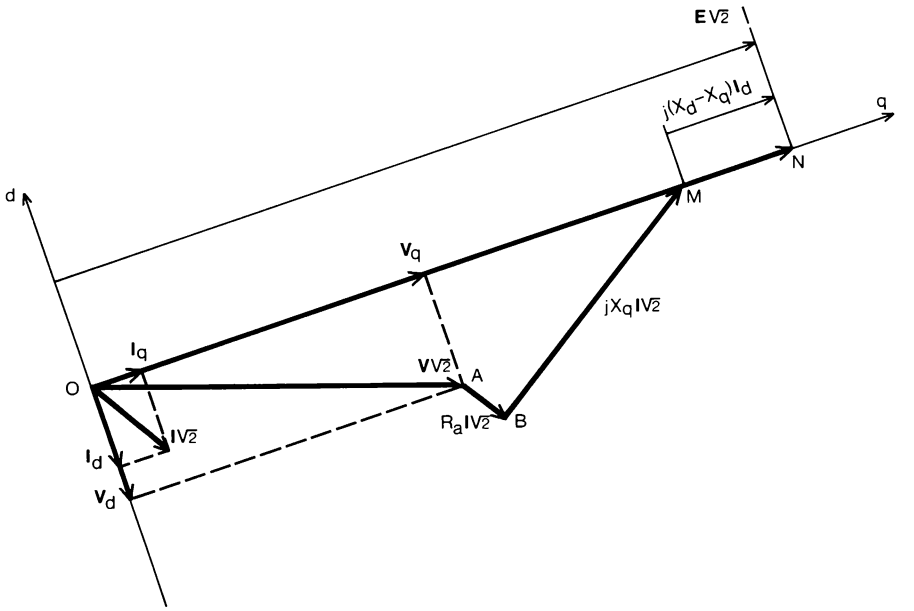


Fig. 6.4. — Diagramme de BLONDEL, en unités physiques.

3.1 Mesure de x_d par un essai à vide et un essai en court-circuit triphasé permanent

Le fonctionnement en court-circuit triphasé correspond à $v = 0$, d'où $v_d = v_q = 0$ soit, d'après (6.56)

$$i_q = 0 \quad \text{d'où} \quad i = i_d$$

donc en modules

$$e = x_d\, i_d = x_d\, i$$

x_d est donc le quotient e/i lors d'un tel régime, e n'est pas mesurable, par contre i_f l'est et la relation linéaire (6.48) (en non saturé) entre e et i_f est obtenue par mesure lors d'un essai à vide où d'après (6.47) : $e = v_q = v$.

3.2 Mesure de x_d et x_q par la méthode du faible glissement

Cette mesure concerne principalement les machines à pôles saillants, pour lesquelles $x_q \neq x_d$ (avec $x_q < x_d$).

La méthode consiste dans un premier temps à entraîner la machine synchrone à la vitesse de synchronisme, à la coupler à une source de tension triphasée de valeur réduite v assez faible pour respecter la condition de non-saturation puis à annuler le courant d'excitation ($i_f = 0$ d'où $e = 0$).

Dans un deuxième temps, on agit sur le moteur d'entraînement de façon à faire varier δ très lentement : cela signifie que la machine doit tourner à une vitesse

très peu différente du synchronisme. Etudions alors le rapport v/i en fonction de δ ; e étant nul il résulte de (6.55) et (6.56) :

$$v_d = -v \sin \delta = -x_q i_q$$

$$v_q = v \cos \delta = x_d i_d .$$

Sachant que $i = \sqrt{i_d^2 + i_q^2}$ il vient :

$$\frac{v}{i} = \sqrt{\frac{x_d^2 x_q^2}{x_d^2 \sin^2 \delta + x_q^2 \cos^2 \delta}} .$$

Lorsque δ varie très lentement, il en est de même du rapport v/i, et celui-ci passe par un maximum égal à x_d (du fait que $x_d > x_q$) lorsque $\delta = 0$ ou π et par un minimum égal à x_q lorsque $\delta = \pm \pi/2$.

Un exemple d'enregistrement oscillographique simultané de la tension et du courant d'une même phase (par exemple v_a et i_a) est donné figure 6.5.

Le fonctionnement est un fonctionnement hors synchronisme, mais le glissement doit être extrêmement faible (en principe inférieur à 1 %, donc plus faible que dans le cas de la figure 6.5), sinon les impédances de la machine ne sont plus les réactances synchrones, ainsi qu'on le verra au chapitre VIII. L'obtention d'un glissement très faible, dans le cas des machines à pôles saillants, n'est réalisable commodément que si v est très faible (de l'ordre de 0,1 à 0,2 p.u.).

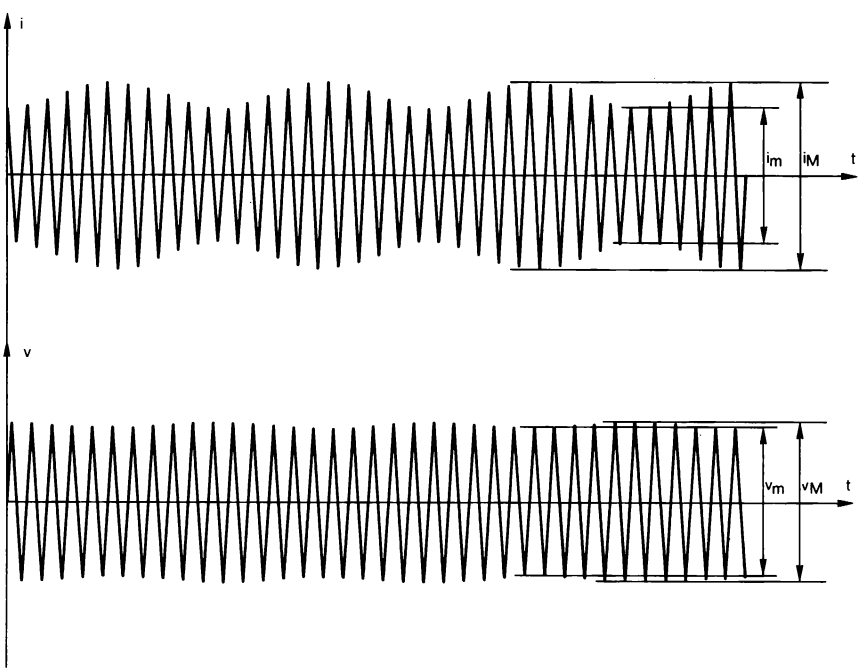


Fig. 6.5. — Oscillogramme de l'essai à faible glissement, pour la mesure de x_d et x_q.

3.3 Mesure de x_q par la méthode de l'excitation négative

Cette méthode concerne les machines à pôles saillants. On commence comme en 3.2 par le couplage à vide de la machine synchrone sur une source triphasée de valeur réduite v, mais celle-ci n'a pas besoin d'être très faible et doit seulement obéir à la condition de non-saturation (v peut atteindre 0,6 à 0,7 p.u.).

La puissance active étant toujours nulle, donc $\delta = 0$, on diminue le courant d'excitation i_f (donc e) jusqu'à zéro puis on l'augmente à nouveau en valeur négative jusqu'à ce que la machine perde le synchronisme. Cette circonstance correspond dans (6.58) à $c_s = 0$ avec $\delta = 0$, donc à cet instant existe la relation :

$$\frac{e}{v} = 1 - \frac{x_d}{x_q}.$$

La valeur négative de i_f à l'instant de la perte de synchronisme fournit e en utilisant la caractéristique à vide, et, v étant mesuré et x_d supposé connu, on en déduit x_q.

3.4 Mesure de x_q par un essai en charge avec mesure de l'angle interne

La méthode consiste à faire fonctionner la machine à un régime synchrone quelconque, avec un angle interne non nul.

Outre les grandeurs usuelles aux bornes (p, q, v), il est nécessaire de pouvoir mesurer δ.

Il résulte de (6.55) et (6.56), et de la figure 6.2 avec r_a négligé, que :

$$v \sin \delta = x_q i_q = x_q i \cos (\delta + \varphi)$$

d'où, en faisant intervenir la puissance active $p = vi \cos \varphi$ et la puissance réactive $q = vi \sin \varphi$

$$x_q = \frac{v^2 \sin \delta}{p \cos \delta - q \sin \delta} \tag{6.68}$$

ou en unités physiques, en faisant intervenir la tension entre phases $U = V\sqrt{3}$:

$$X_q = \frac{U^2 \sin \delta}{P \cos \delta - Q \sin \delta}.$$

Ici encore la validité de la méthode requiert que le fonctionnement soit non saturé, donc que la tension aux bornes soit nettement inférieure à sa valeur nominale.

CHAPITRE VII

RÉGIMES TRANSITOIRES DES MACHINES SYNCHRONES A LA VITESSE DE SYNCHRONISME

1 INTRODUCTION

Le comportement d'une machine synchrone en régime transitoire est entièrement déterminé par les équations électriques (6.26), (6.27), (6.28), (6.30), (6.31), (6.32), magnétiques (6.37), (6.38), (6.39) et mécaniques (6.9) et (6.41). Les équations électriques et magnétiques forment un système d'équations différentielles, qui sont linéaires seulement si la vitesse peut être considérée comme constante.

Au cours de ce chapitre nous nous placerons dans le cas d'une variation brusque des conditions électriques aux bornes de la machine, survenant à partir d'un régime permanent synchrone, et lorsqu'on s'intéresse surtout aux premiers instants suivant la perturbation, c'est-à-dire lorsque les variations de vitesse peuvent être négligées dans les équations de PARK (6.26) et (6.27).

Les régimes transitoires correspondants sont principalement les variations brusques de tension : courts-circuits, faux couplages, dont l'étude est importante pour la connaissance des contraintes subies par le matériel, ainsi que les variations brusques de courant, consécutives à un déclenchement.

Les équations électriques et magnétiques étant linéaires, la méthode d'étude est le calcul opérationnel, et, les conditions initiales étant des constantes, on aura intérêt à utiliser la méthode de superposition, permettant de poursuivre le calcul assez loin sans introduire de conditions initiales dans les transformées de LAPLACE. Cette méthode ne s'applique pas aux deux équations mécaniques ; mais elle permet cependant, en fin de calcul, de calculer le couple (6.9) à partir des expressions temporelles des flux et des courants, et d'estimer à l'aide de (6.41) s'il était justifié de négliger les variations de vitesse.

Signalons en outre que toutes les perturbations et tous les régimes étudiés dans ce chapitre concernent les trois phases de l'induit de la même manière, d'où il résulte qu'il n'y a pas de composante « homopolaire », donc les équations (6.28) et (6.39) deviennent inutiles.

2 MISE EN FORME OPÉRATIONNELLE DES ÉQUATIONS

Les équations différentielles étant linéaires et les conditions initiales étant des constantes, il résulte de l'étude faite au chapitre III, paragraphe 2.2 que la trans-

formation de LAPLACE appliquée aux *variations* des grandeurs (tensions, courants, flux) à partir de l'instant de la perturbation s'écrit simplement en remplaçant l'opérateur d/dt par p.

Dans ce paragraphe cependant, pour ne pas alourdir l'écriture, nous n'utiliserons pas le symbole Δ pour traduire les variations et les quantités telles que $\Delta v_d(p)$, $\Delta i_d(p)$... etc. seront simplement écrites $v_d(p)$, $i_d(p)$ et même simplement v_d, i_d... lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, le symbole Δ (régime superposé) ne sera introduit que dans les applications.

Les équations (6.26) et (6.27) s'écrivent alors (la vitesse ω_r étant désormais constante et égale à ω)

$$\boxed{\begin{aligned} v_d &= -p\psi_d - \psi_q\omega - r_a i_d \\ v_q &= -p\psi_q + \psi_d\omega - r_a i_q \end{aligned}} \qquad (7.1)\ (7.2)$$

Les équations (6.30), (6.31) et (6.32) s'écrivent :

$$\begin{cases} v_f = r_f i_f + p\psi_f \\ 0 = r_D i_D + p\psi_D \\ 0 = r_Q i_Q + p\psi_Q \end{cases} \qquad (7.3)$$

mais nous pouvons les combiner avec (6.37) et (6.38), ce qui donne

$$\begin{vmatrix} \psi_d \\ \dfrac{v_f}{p} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_d & m_{af} & m_{aD} \\ m_{af} & \dfrac{r_f}{p} + l_{ff} & m_{fD} \\ m_{aD} & m_{fD} & \dfrac{r_D}{p} + l_{DD} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_d \\ i_f \\ i_D \end{vmatrix}. \qquad (7.4)$$

$$\begin{vmatrix} \psi_q \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_q & m_{aQ} \\ m_{aQ} & \dfrac{r_Q}{p} + l_{QQ} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_q \\ i_Q \end{vmatrix}. \qquad (7.5)$$

Le plus souvent on s'intéresse à la connaissance des grandeurs statoriques ; en vue de résoudre le système (7.1) et (7.2) on est donc amené à réduire (7.4) par élimination de i_f et i_D et à réduire (7.5) par élimination de i_Q. Le résultat est de la forme :

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_d &= l_d(p)\, i_d + g(p)\, v_f \\ \psi_q &= l_q(p)\, i_q \end{aligned}} \qquad (7.6)\ (7.7)$$

$l_d(p)$, *inductance opérationnelle d'axe direct*, est une fraction rationnelle du 2e degré en p au numérateur et au dénominateur, valant l_d pour $p = 0$, donc de la forme :

$$l_d(p) = l_d \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2}{1 + b_1 p + b_2 p^2}$$

$g(p)$, *fonction d'excitation*, est une fraction rationnelle du 1er degré en p au numérateur et du 2e degré en p au dénominateur, ayant les mêmes racines au dénominateur que $l_d(p)$, et valant m_{af}/r_f pour $p = 0$, donc de la forme :

$$g(p) = \frac{m_{af}}{r_f} \frac{1 + c_1 p}{1 + b_1 p + b_2 p^2}$$

$l_q(p)$, *inductance opérationnelle d'axe en quadrature*, est une fraction rationnelle du 1er degré en p au numérateur et au dénominateur, valant l_q pour $p = 0$, donc de la forme :

$$l_q(p) = l_q \frac{1 + d_1 p}{1 + e_1 p}.$$

Du fait que les relations de départ concernent des circuits couplés magnétiquement, les trinômes $1 + a_1 p + a_2 p^2$ et $1 + b_1 p + b_2 p^2$ ont leurs racines réelles et négatives, ils peuvent donc être factorisés en binômes du type

$$1 + Tp \,(T > 0),$$

et les fonctions de transfert ci-dessus s'écrivent sous la forme suivante, où apparaissent la plupart des constantes de temps caractéristiques des régimes transitoires des machines synchrones :

$$l_d(p) = l_d \frac{(1 + T'_d p)(1 + T''_d p)}{(1 + T'_{do} p)(1 + T''_{do} p)} \tag{7.8}$$

$$g(p) = \frac{m_{af}}{r_f} \frac{1 + T_D p}{(1 + T'_{do} p)(1 + T''_{do} p)} \tag{7.9}$$

$$l_q(p) = l_q \frac{1 + T''_q p}{1 + T''_{qo} p} \tag{7.10}$$

Toutes les constantes de temps ci-dessus peuvent évidemment être calculées en fonction des coefficients des équations (7.4) et (7.5). En ce qui concerne les quatre constantes de temps T'_d, T''_d, T'_{do}, T''_{do} leurs expressions rigoureuses sont extrêmement compliquées mais, du fait que leurs ordres de grandeurs usuels vérifient les inégalités :

$$\begin{cases} T''_d \ll T'_d \\ T''_{do} \ll T'_{do} \end{cases} \tag{7.11}$$

il est possible d'en donner des expressions approchées assez simples et facilitant beaucoup l'interprétation physique des phénomènes. L'étude des expressions rigoureuses et approchées, ainsi que des schémas équivalents, sera faite au paragraphe 7.

Pour certaines mises en forme des calculs on sera amené à utiliser, au lieu

des inductances opérationnelles $l_d(p)$ et $l_q(p)$, les réactances opérationnelles obtenues simplement en les multipliant par ω

$$x_d(p) = \omega l_d(p) = x_d \frac{(1 + T'_d\, p)(1 + T''_d\, p)}{(1 + T'_{do}\, p)(1 + T''_{do}\, p)} \tag{7.12}$$

réactance opérationnelle d'axe direct

$$x_q(p) = \omega l_q(p) = x_q \frac{1 + T''_q\, p}{1 + T''_{qo}\, p} \tag{7.13}$$

réactance opérationnelle d'axe en quadrature.

Enfin, et notamment en vue du calcul des régimes impliquant une variation brusque de tension aux bornes de l'induit, il est commode d'introduire les « *admittances opérationnelles* » d'axe direct et quadrature

$$y_d(p) = \frac{1}{x_d(p)} \qquad y_q(p) = \frac{1}{x_q(p)}$$

et de les décomposer en éléments simples, sous la forme classique ci-dessous dont les différents termes s'obtiennent aisément à partir de (7.12) et (7.13) par des méthodes connues (ne serait-ce que par simple identification) :

$$y_d(p) = \frac{1}{x_d} + \left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d}\right)\frac{T'_d\, p}{1 + T'_d\, p} + \left(\frac{1}{x''_d} - \frac{1}{x'_d}\right)\frac{T''_d\, p}{1 + T''_d\, p} \tag{7.14}$$

$$y_q(p) = \frac{1}{x_q} + \left(\frac{1}{x''_q} - \frac{1}{x_q}\right)\frac{T''_q\, p}{1 + T''_q\, p} \tag{7.15}$$

L'appellation des réactances et constantes de temps introduites ci-dessus est la suivante :

x_d = *réactance synchrone longitudinale*
x'_d = *réactance transitoire longitudinale*
x''_d = *réactance subtransitoire longitudinale*
x_q = *réactance synchrone transversale*
x''_q = *réactance subtransitoire transversale*
T'_{do} = *constante de temps transitoire longitudinale à circuit ouvert*
T''_{do} = *constante de temps subtransitoire longitudinale à circuit ouvert*
T'_d = *constante de temps transitoire longitudinale en court-circuit*
T''_d = *constante de temps subtransitoire longitudinale en court-circuit*
T''_{qo} = *constante de temps subtransitoire transversale à circuit ouvert*
T''_q = *constante de temps subtransitoire transversale en court-circuit.*

L'indication « à circuit ouvert » ou « en court-circuit » est relative à l'état de l'enroulement induit lors des régimes où interviennent les constantes de temps correspondantes.

La justification du type de développement adoptée en (7.14) et (7.15), et de l'appellation des paramètres associés, apparaîtra dans la suite du chapitre.

Entre ces réactances et les constantes de temps de (7.12) et (7.13) existent les relations rigoureuses

$$\frac{x_d}{x''_d} = \frac{T'_{do}\, T''_{do}}{T'_d\, T''_d} \tag{7.16}$$

$$\frac{x_q}{x''_q} = \frac{T''_{qo}}{T''_q} \tag{7.17}$$

et, compte tenu des inégalités (7.11), les relations approchées

$$\begin{cases} \dfrac{x_d}{x'_d} \# \dfrac{T'_{do}}{T'_d} \\ \dfrac{x'_d}{x''_d} \# \dfrac{T''_{do}}{T''_d} \end{cases} \tag{7.18}$$

Les relations (7.14) et (7.15) constituent les véritables relations de définition des réactances x_d, x'_d, x''_d, x_q, x''_q ainsi que des constantes de temps T'_d, T''_d, T''_q [10]. Ces grandeurs sont donc obtenues soit par le calcul à partir de (7.4) et (7.5) soit par l'analyse des oscillogrammes de court-circuit (voir paragraphe 3.3.3). De même les relations (7.12) et (7.13) définissent les constantes de temps.

Au paragraphe 7.3, on trouvera des expressions de ces réactances et constantes de temps en fonction des résistances et inductances des divers enroulements. Ces expressions, rigoureuses en ce qui concerne l'axe en quadrature, ne sont qu'approchées pour ce qui concerne l'axe direct, l'approximation étant d'autant meilleure que les inégalités (7.11) sont mieux respectées.

3 VARIATION BRUSQUE DE TENSION AUX BORNES. APPLICATION AU COURT-CIRCUIT TRIPHASÉ ET AU FAUX COUPLAGE

Le problème que nous nous proposons de traiter correspond à une variation brusque de tension aux bornes de l'induit, à partir d'un régime permanent synchrone, en supposant que la vitesse de rotation ω n'est pas affectée et que la tension d'excitation v_f n'est pas modifiée.

Le régime initial est caractérisé par les grandeurs v_{d0}, v_{q0}, i_{d0}, i_{q0}, ψ_{d0}, ψ_{q0}, v_{f0} obtenues par la construction de la figure 6.2 ou par les calculs correspondants du chapitre VI, paragraphe 2.

L'instant de la perturbation étant pris comme origine des temps, le régime

superposé, caractérisé par le symbole $\bar{\Delta}$ est défini par les relations, valables pour $t > 0$:

$$(7.19)\qquad \begin{cases} v_d(t) = v_{d0} + \Delta v_d(t) \\ v_q(t) = v_{q0} + \Delta v_q(t) \\ i_d(t) = i_{d0} + \Delta i_d(t) \\ i_q(t) = i_{q0} + \Delta i_q(t) \\ \psi_d(t) = \psi_{d0} + \Delta\psi_d(t) \\ \psi_q(t) = \psi_{q0} + \Delta\psi_q(t) \\ v_f(t) = v_{f0} + \Delta v_f(t)\,. \end{cases}$$

La perturbation consiste à donner à v_d et v_q de nouvelles valeurs constantes v_{d1} et v_{q1}, et à laisser v_f inchangé.

Nous aurons donc les transformées suivantes, pour les conditions superposées :

$$(7.20)\qquad \begin{cases} \Delta v_d(p) = \dfrac{v_{d1} - v_{d0}}{p} = \dfrac{\Delta v_{d0}}{p} \\ \Delta v_q(p) = \dfrac{v_{q1} - v_{q0}}{p} = \dfrac{\Delta v_{q0}}{p} \\ \Delta v_f(p) = 0 \end{cases}$$

Δv_{d0} et Δv_{q0} étant des constantes et les équations (7.1), (7.2), (7.6) et (7.7) deviennent :

$$(7.21)\qquad \frac{\Delta v_{d0}}{p} = -\,p\,\Delta\psi_d - \omega\,\Delta\psi_q - r_a\,\Delta i_d$$

$$(7.22)\qquad \frac{\Delta v_{q0}}{p} = -\,p\,\Delta\psi_q + \omega\,\Delta\psi_d - r_a\,\Delta i_q$$

$$(7.23)\qquad \Delta\psi_d = l_d(p)\,\Delta i_d$$

$$(7.24)\qquad \Delta\psi_q = l_q(p)\,\Delta i_q$$

dans lesquelles $\Delta\psi_d$, $\Delta\psi_q$, Δi_d, Δi_q sont des fonctions de p que nous nous proposons de calculer, et $l_d(p)$ et $l_q(p)$ sont données par (7.8) et (7.10).

3.1 Calcul des variations de flux

L'élimination de Δi_d et Δi_q conduit au système :

$$(7.25)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\Delta v_{d0}}{p} \\ \dfrac{\Delta v_{q0}}{p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\left(p + \dfrac{r_a}{l_d(p)}\right) & -\omega \\ \omega & -\left(p + \dfrac{r_a}{l_q(p)}\right) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Delta\psi_d \\ \Delta\psi_q \end{vmatrix}.$$

Le déterminant de ce système s'écrit :

$$\text{Det} = p^2 + \omega^2 + r_a p\left[\frac{1}{l_d(p)} + \frac{1}{l_q(p)}\right] + \frac{r_a^2}{l_d(p)\, l_q(p)}.$$

Cette expression peut être simplifiée, en raison de la faible valeur de r_a, ou plus précisément en raison de la faible valeur des quantités du type r_a/l, l étant une inductance, devant ω.

Le dernier terme, en r_a^2, est toujours négligeable devant ω^2, quel que soit p.

Le terme en $r_a\, p$, qu'on ne peut négliger car il conditionne l'amortissement du flux dans l'induit, peut être simplifié par la considération algébrique suivante : r_a étant faible, le terme associé n'a de valeur significative dans le déterminant que lorsque $p^2 + \omega^2$ est faible, ce qui correspond à $|\, p\,| \sim \omega$, donc $|\, p\,|$ grand comparé aux coefficients d'amortissement, inverses des constantes de temps. Considérant alors (7.12), (7.13), (7.16) et (7.17) on voit que pour les grandes valeurs de p, $\omega l_d(p)$ peut être assimilé à x_d'' et $\omega l_q(p)$ à x_q''.

On pose alors :

(7.26)
$$\boxed{\alpha = \frac{r_a\,\omega}{2}\left(\frac{1}{x_d''} + \frac{1}{x_q''}\right) = \frac{1}{\mathrm{T}_a}}$$

α est le *coefficient d'amortissement de l'induit* (en présence des enroulements du rotor en court-circuit) et T_a est la *constante de temps de l'induit.*

Le déterminant s'écrit alors :

(7.27)
$$\boxed{\text{Det} = p^2 + \omega^2 + 2\,\alpha p}$$

d'où la solution de (7.25) :

(7.28)
$$\begin{cases} \Delta\psi_d(p) = \dfrac{1}{p(p^2 + 2\,\alpha p + \omega^2)}\left[-\Delta v_{d0}\left(p + \dfrac{r_a}{l_d(p)}\right) + \Delta v_{q0}\,\omega\right] \\ \Delta\psi_q(p) = \dfrac{1}{p(p^2 + 2\,\alpha p + \omega^2)}\left[-\Delta v_{d0}\,\omega - \Delta v_{q0}\left(p + \dfrac{r_a}{l_q(p)}\right)\right]. \end{cases}$$

La solution complète s'obtiendrait en calculant l'original des fractions rationnelles (7.28) par les méthodes connues.

Lorsqu'on s'intéresse seulement à l'amplitude des flux et des courants, et à leur évolution dans le temps, on peut obtenir une solution simple suffisamment précise, que nous allons développer (c'est dans le seul cas où on voudrait calculer avec précision le couple électromagnétique, que les simplifications ci-dessous seraient abusives).

Les simplifications proposées consistent :

1° à négliger r_a au numérateur des expressions (7.28),

2° à simplifier la décomposition en éléments simples des fractions du type :

$$\frac{1}{(p+\beta)(p^2+2\alpha p+\omega^2)} \quad \text{et} \quad \frac{p}{(p+\beta)(p^2+2\alpha p+\omega^2)}$$

lorsque β et α, qui sont des coefficients d'amortissement, ou encore des inverses de constantes de temps, sont petits devant ω. (Les formules qui vont suivre incluent évidemment le cas $\beta = 0$). On vérifie facilement que dans ces conditions :

(7.29)

si α et $\beta \ll \omega$

$$\frac{p}{(p+\beta)(p^2+2\alpha p+\omega^2)} \# \frac{1}{2j\omega}\left(\frac{1}{p+\alpha-j\omega} - \frac{1}{p+\alpha+j\omega}\right)$$

dont l'original est $\quad \frac{1}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t$

$$\frac{1}{(p+\beta)(p^2+2\alpha p+\omega^2)} \# \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{2}{p+\beta} - \frac{1}{p+\alpha-j\omega} - \frac{1}{p+\alpha+j\omega}\right)$$

dont l'original est $\quad \frac{1}{\omega^2}(e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}\cos \omega t)$

Moyennant ces approximations, l'original de (7.28) s'écrit :

(7.30)

$$\begin{cases} \Delta\psi_d(t) = -\dfrac{\Delta v_{d0}}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t + \dfrac{\Delta v_{q0}}{\omega}(1 - e^{-\alpha t}\cos \omega t) \\ \Delta\psi_q(t) = -\dfrac{\Delta v_{d0}}{\omega}(1 - e^{-\alpha t}\cos \omega t) - \dfrac{\Delta v_{q0}}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t \end{cases}$$

que l'on peut reporter dans (7.19) pour obtenir l'expression complète des flux.

3.2 Calcul des variations de courant

Leur expression opérationnelle s'obtient simplement en reportant (7.28) dans (7.23) et (7.24).

En appliquant les mêmes simplifications que pour le calcul des flux, il vient tout d'abord :

(7.31)

$$\begin{cases} \Delta i_d(p) = -\dfrac{\Delta v_{d0}}{l_d(p)(p^2+2\alpha p+\omega^2)} + \dfrac{\omega \Delta v_{q0}}{p l_d(p)(p^2+2\alpha p+\omega^2)} \\ \Delta i_q(p) = -\dfrac{\Delta v_{d0}}{p l_q(p)(p^2+2\alpha p+\omega^2)} - \dfrac{\Delta v_{q0}}{l_q(p)(p^2+2\alpha p+\omega^2)} \end{cases}.$$

Le passage à l'original est alors immédiat en utilisant les formules développées (7.14) et (7.15) des admittances opérationnelles $y_d(p)$ et $y_q(p)$, inverses de $\omega l_d(p)$ et $\omega l_q(p)$, et les expressions approchées (7.29). Il vient :

$$(7.32)\quad \begin{cases} \Delta i_d(t) = -\dfrac{\Delta v_{d0}}{x''_d}\,e^{-\alpha t}\sin\omega t + \Delta v_{q0}\left[\dfrac{1}{x_d} + \right. \\ \qquad \left. + \left(\dfrac{1}{x'_d} - \dfrac{1}{x_d}\right)e^{-t/T'_d} + \left(\dfrac{1}{x''_d} - \dfrac{1}{x'_d}\right)e^{-t/T''_d} - \dfrac{1}{x''_d}\,e^{-\alpha t}\cos\omega t\right] \\ \Delta i_q(t) = -\Delta v_{d0}\left[\dfrac{1}{x_q} + \left(\dfrac{1}{x''_q} - \dfrac{1}{x_q}\right)e^{-t/T''_q} - \dfrac{1}{x''_q}\,e^{-\alpha t}\cos\omega t\right] - \\ \qquad - \dfrac{\Delta v_{q0}}{x''_q}\,e^{-\alpha t}\sin\omega t \end{cases}$$

que l'on peut reporter dans (7.19) pour obtenir l'expression complète des courants d'axes.

Le passage aux courants dans les enroulements *a*, *b*, *c* fait alors intervenir la transformation inverse de PARK (5.23), soit pour la phase *a* par exemple :

$$(7.33)\qquad i_a(t) = i_d(t)\cos\theta + i_q(t)\sin\theta$$

avec ici :

$$(7.34)\qquad \theta = \omega t + \theta_0$$

le courant dans les phases *b* et *c* s'en déduisant en remplaçant θ_0 par

$$\theta_0 - \frac{2\pi}{3} \quad \text{et} \quad \theta_0 - \frac{4\pi}{3}$$

respectivement.

Le principe est le même pour les flux, et les expressions temporelles des tensions avant l'instant de la perturbation font en outre intervenir l'angle interne δ déduit de la figure 6.2 ou des relations (6.55).

3.3 Etude des courants en cas de court-circuit triphasé à vide

Le court-circuit triphasé correspond au cas où v_{d1} et v_{q1} sont nuls dans (7.20), d'où $\Delta v_{d0} = -v_{d0}$ et $\Delta v_{q0} = -v_{q0}$.

Nous allons développer le cas du court-circuit triphasé à vide, pour les raisons suivantes :

— les calculs ultérieurs en seront simplifés, ainsi que l'interprétation physique ;

— les contraintes en courant et en couple sont généralement un peu plus sévères lors d'un court-circuit en charge que lors d'un court-circuit à vide, mais cependant du même ordre de grandeur ;

— le court-circuit triphasé à vide à tension réduite est couramment pratiqué à titre d'essai pour déterminer expérimentalement les réactances et constantes de temps de la machine synchrone.

3.3.1 *Courants dans les phases de l'induit*

Les conditions particulières à appliquer à (7.19) et (7.20) sont :

$$\begin{cases} v_{d0} = i_{d0} = i_{q0} = \psi_{q0} = 0 \\ v_{q0} = e \qquad \psi_{d0} = \dfrac{e}{\omega} \\ \Delta v_{d0} = 0 \qquad \Delta v_{q0} = -e\,. \end{cases} \tag{7.35}$$

La combinaison de (7.19), (7.30) et (7.35) donne, pour les flux

$$\begin{cases} \psi_d(t) = \dfrac{e}{\omega} e^{-\alpha t} \cos \omega t \\ \psi_q(t) = \dfrac{e}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t \end{cases} \tag{7.36}$$

et pour les courants, utilisant en outre (7.32)

$$\begin{cases} i_d(t) = -e\left[\dfrac{1}{x_d} + \left(\dfrac{1}{x'_d} - \dfrac{1}{x_d}\right) e^{-t/T'_d} + \left(\dfrac{1}{x''_d} - \dfrac{1}{x'_d}\right) e^{-t/T''_d} - \dfrac{1}{x''_d} e^{-\alpha t} \cos \omega t\right] \\ i_q(t) = \dfrac{e}{x''_q} e^{-\alpha t} \sin \omega t\,. \end{cases} \tag{7.37}$$

Calculons maintenant les grandeurs de phases. La tension et le flux de la phase *a* avant court-circuit se déduisent de (5.24), (5.25), (7.34), (7.35)

$$\begin{cases} v_{a0}(t) = e \sin(\omega t + \theta_0) \\ \psi_{a0}(t) = \dfrac{e}{\omega} \cos(\omega t + \theta_0)\,. \end{cases} \tag{7.38}$$

Le flux et le courant de la phase *a* après le court-circuit se déduisent de (5.23), (5.25), (7.34), (7.35), (7.36), (7.37) :

$$\psi_a(t) = \frac{e}{\omega} e^{-\alpha t} \cos \theta_0 \tag{7.39}$$

$$\boxed{\begin{aligned} i_a(t) = -e\left[\frac{1}{x_d} + \left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d}\right) e^{-t/T'_d} + \left(\frac{1}{x''_d} - \frac{1}{x'_d}\right) e^{-t/T''_d}\right] \cos(\omega t + \theta_0) + \\ + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{x''_d} + \frac{1}{x''_q}\right) e^{-\alpha t} \cos \theta_0 + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{x''_d} - \frac{1}{x''_q}\right) e^{-\alpha t} \cos(2\omega t + \theta_0) \end{aligned}} \tag{7.40}$$

Les grandeurs homologues, pour les phases *b* et *c*, s'obtiennent en remplaçant θ_0 par $\theta_0 - \frac{2\pi}{3}$ et $\theta_0 - \frac{4\pi}{3}$ respectivement. Si on souhaite exprimer (7.40) en

unités physiques il suffit d'utiliser (6.10) pour le courant, (6.59) pour la f.é.m. et (6.1) pour les réactances.

La figure 7.1 reproduit l'enregistrement oscillographique du courant dans les trois phases lors d'un court-circuit triphasé.

3.3.2 *Commentaire sur l'expression* (7.40) *et interprétation physique*

Le courant dans une phase quelconque, par exemple la phase a, est la somme de trois termes :

— un terme pseudo-périodique amorti, de pseudo-pulsation ω, d'amplitude initiale e/x''_d (courant subtransitoire), d'amplitude finale e/x_d (courant de court-circuit permanent) ;

— un terme apériodique amorti, dont l'amplitude initiale dépend de la position initiale, par rapport au champ inducteur, de l'axe de la phase considérée. On remarque, en comparant avec (7.38) ou (7.39), que le coefficient $\cos \theta_0$ traduit l'influence sur ce terme du flux traversant la phase considérée à l'instant initial ;

— un terme pseudo-périodique amorti, de pseudo-pulsation $2\,\omega$, dont l'amplitude est généralement faible du fait que x''_d et x''_q ont des valeurs numériques voisines.

On peut donner de ces différents termes l'interprétation physique suivante :

A la mise en court-circuit, tous les enroulements de la machine sont fermés soit sur une impédance nulle, soit, en ce qui concerne l'inducteur, sur une source continue d'impédance très faible. Le flux à travers ces enroulements ne peut donc

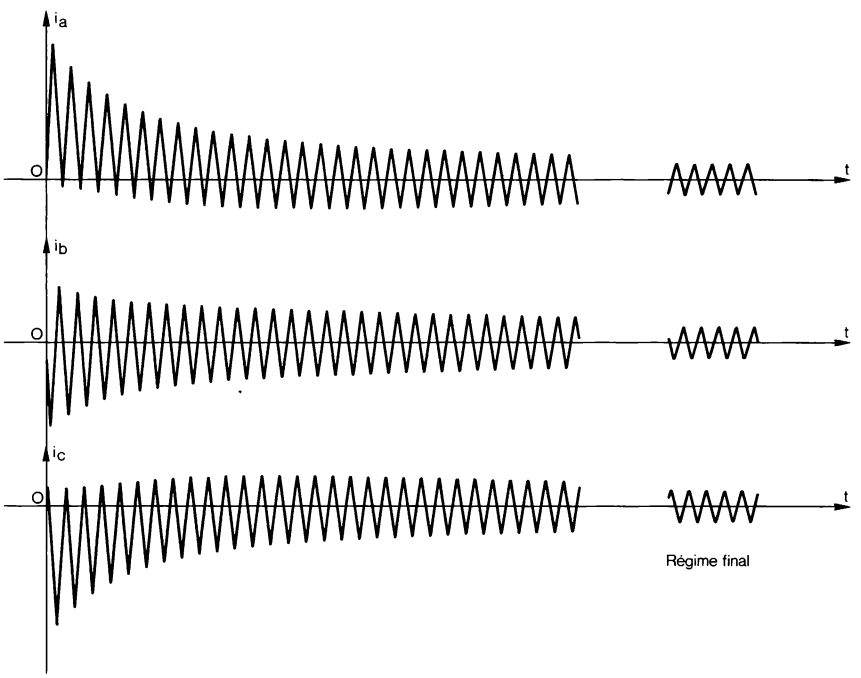


Fig. 7.1. — Oscillogramme du courant dans les trois phases de l'induit d'une machine synchrone lors d'un court-circuit brusque triphasé à vide.

varier instantanément. Mais l'inducteur et l'induit continuent à tourner l'un par rapport à l'autre, si bien que les lignes d'induction pour se refermer doivent emprunter de nouveaux trajets, correspondant au début à une augmentation de réluctance, ainsi qu'il est schématiquement représenté figure 7.2 où on a figuré pour simplifier une seule phase de l'induit et les seuls amortisseurs d'axe direct, mais dessinés des deux côtés pour la symétrie de la figure. En outre on a supposé que la phase considérée a son axe aligné avec l'inducteur au moment du court-circuit.

Le maintien du flux dans les enroulements, malgré une réluctance accrue, entraîne un appel d'ampères-tours dans tous les circuits, et le fait que les nouveaux trajets des lignes d'induction sont ceux des fuites magnétiques explique l'intervention des inductances de fuites totales dans l'expression des courants.

Le deuxième terme (apériodique) de (7.40) correspond à l'appel de courant nécessité par le maintien du flux dans l'enroulement a, et il s'éteint en faisant intervenir la constante de temps propre à cet enroulement, lorsqu'il se trouve en présence des enroulements rotoriques en court-circuit.

Le premier terme (pseudo-périodique amorti) de (7.40) a pour origine les phénomènes dont sont le siège les enroulements du rotor : l'appel de courant dans ces circuits s'amortit apériodiquement avec les constantes de temps T'_d et T''_d, caractéristiques des circuits rotoriques d'axe direct face à l'induit en court-circuit et ces composantes du courant rotor induisent au stator, par l'effet de leur rotation, des termes de pseudo-pulsation ω dont les amplitudes suivent les mêmes lois d'amortissement.

Enfin le dernier terme de (7.40) provient de ce que la composante apériodique du courant induit, décroissant selon la loi $e^{-\alpha t}$, est modulée à la pulsation 2ω par l'anisotropie subtransitoire du rotor, due à la différence des réactances x''_d et x''_q.

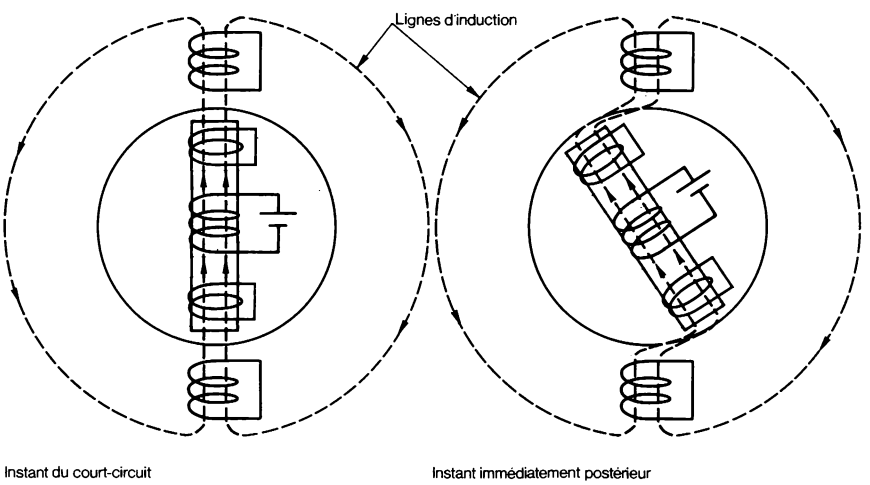


Fig. 7.2. — Principe de la déformation des lignes de champ magnétique immédiatement après un court-circuit.

3.3.3 *Mesure des réactances et constantes de temps à partir d'un essai de court-circuit triphasé*

Cet essai doit être pratiqué à tension réduite ($e < 0{,}3$ en général, et même moins pour les très grosses machines) afin d'éliminer les effets de la saturation magnétique et de réduire les contraintes électromécaniques.

L'exploitation des résultats s'effectue en considérant que les courbes obtenues par enregistrement oscillographique, telles que fig. 7.1 par exemple, obéissent à la loi (7.40) dans laquelle on considère le dernier terme, à la pulsation 2ω, comme négligeable.

L'amplitude de la composante pseudo-périodique amortie est le coefficient de $\cos(\omega t + \theta_0)$ dans cette équation. Elle s'obtient graphiquement en traçant les enveloppes supérieure et inférieure de l'une quelconque des courbes figure 7.1, et en mesurant à des intervalles de temps bien choisis (dépendant de la rapidité des amortissements) la différence entre les ordonnées de ces deux enveloppes.

La moitié de cette différence est l'amplitude simple, obéissant d'après (7.40) à la loi (en valeur absolue)

$$i(t) = e\left[\frac{1}{x_d} + \left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d}\right) e^{-t/T'_d} + \left(\frac{1}{x''_d} - \frac{1}{x'_d}\right) e^{-t/T''_d}\right].$$

La réactance synchrone x_d étant connue soit par ailleurs soit en prolongeant l'enregistrement jusqu'au régime de court-circuit permanent, on peut retrancher le terme correspondant, d'où :

$$\Delta i(t) = e\left[\left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d}\right) e^{-t/T'_d} + \left(\frac{1}{x''_d} - \frac{1}{x'_d}\right) e^{-t/T''_d}\right]$$

que l'on reporte en coordonnées semi-logarithmiques figure 7.3.

Du fait que T''_d est généralement petit devant T'_d, au bout de peu de temps $\Delta i(t)$ se confond avec la composante transitoire :

$$\Delta i'(t) = e\left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d}\right) e^{-t/T'_d}.$$

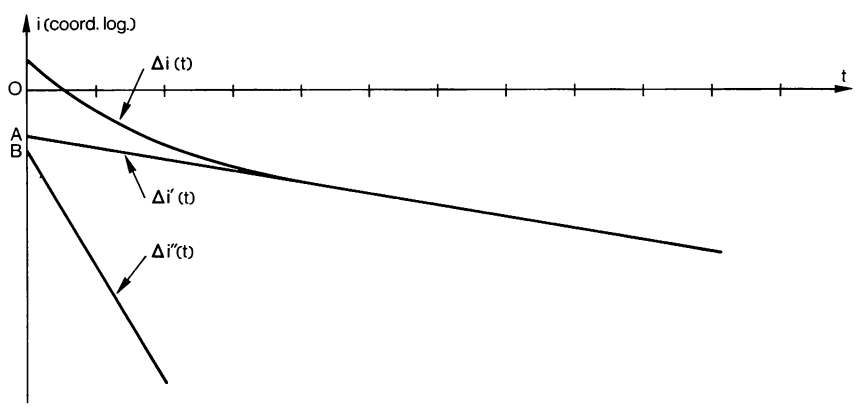


Fig. 7.3. — Détermination graphique des réactances et constantes de temps d'une machine synchrone à partir d'un oscillogramme de court-circuit.

On constate en effet que le graphique de $\Delta i(t)$ tend rapidement vers une droite, dont l'extrapolation à $t = 0$ (point A) a pour ordonnée $e\left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d}\right)$ d'où x'_d, et dont la pente fournit T'_d.

On reporte à nouveau en coordonnées semi-logarithmiques la composante subtransitoire :

$$\Delta i''(t) = \Delta i(t) - \Delta i'(t)$$

qui doit suivre la loi $e\left(\frac{1}{x''_d} - \frac{1}{x'_d}\right) e^{-t/T''_d}$, son graphique doit être une droite dont l'extrapolation à $t = 0$ (point B) a pour ordonnée $e\left(\frac{1}{x''_d} - \frac{1}{x'_d}\right)$, d'où x''_d, et dont la pente fournit T''_d.

L'existence du terme apériodique amorti dans l'équation (7.40) se traduit sur l'enregistrement de la figure 7.1 par le fait que les deux enveloppes précédemment définies ne sont généralement pas symétriques par rapport à l'axe des temps, et cette asymétrie dépend de la valeur de θ_0. Pour évaluer ce terme avec la meilleure précision on choisit donc celui des trois enregistrements de la figure 7.1 qui présente le maximum d'asymétrie, on trace ensuite la courbe dont les ordonnées sont la moyenne *algébrique* des ordonnées des deux enveloppes ; cette courbe suit la loi donnée par le deuxième terme de (7.40), donc son tracé en coordonnées semi-logarithmiques permet de mesurer le coefficient α.

N. B. : Cet essai ne permet pas de déterminer les grandeurs caractéristiques de l'axe en quadrature. Des méthodes permettant d'obtenir ces grandeurs existent [16], mais elles ne sont pas d'un emploi courant et leur exposé sortirait du cadre de cet ouvrage. On indiquera cependant plus loin un procédé de mesure de x''_q.

3.3.4 *Indications sur l'expression du courant inducteur*

Lors d'un régime transitoire caractérisé par une variation brusque des conditions aux bornes, la tension d'excitation v_f restant inchangée, l'expression opérationnelle de la variation $\Delta i_f(p)$ du courant d'excitation se déduit de $\Delta i_d(p)$ en éliminant $\Delta i_D(p)$ entre les deux dernières équations (7.4), après avoir rétabli le symbole Δ dans les deux matrices colonnes.

Le développement du calcul fait intervenir, outre les réactances et constantes de temps déjà introduites, la « constante de temps des fuites d'amortisseur d'axe direct » T_D, dont on trouvera l'expression au paragraphe 7 où sont établis les schémas équivalents de la machine synchrone.

On trouve en effet, à partir de (7.4) et des expressions du paragraphe 7 :

$$\Delta i_f(p) = \frac{-\, l_{md}\, p(1 + T_D\, p)}{r_f\,(1 + T'_{do}\, p)\,(1 + T''_{do}\, p)}\, \Delta i_d(p)\,.$$

Cette relation s'applique à toute variation brusque, et, notamment, en cas de variation de la tension aux bornes, $\Delta i_d(p)$ doit être remplacé par la première

relation (7.31). Si on se limite au cas du court-circuit triphasé à vide, il convient de remplacer Δv_{d0} par 0 et Δv_{q0} par $-e$, d'où en utilisant aussi (7.12) :

$$\Delta i_f(p) = \frac{e x_{md}\,\omega(1 + T_D\,p)}{x_d\,r_f(1 + T'_d\,p)(1 + T''_d\,p)(p^2 + 2\,\alpha p + \omega^2)}.$$

Utilisant la décomposition approximative valable ici du fait que T_D et T''_d sont petits devant T'_d :

$$\frac{1 + T_D\,p}{(1 + T'_d\,p)(1 + T''_d\,p)} \# \frac{1}{T'_d}\left[\frac{T'_d}{1 + T'_d\,p} - \frac{T''_d - T_D}{1 + T''_d\,p}\right]$$

on trouve directement l'original de $\Delta i_f(p)$ à l'aide des expressions (7.29) :

$$\Delta i_f(t) = \frac{e x_{md}}{\omega T'_d\,r_f\,x_d}\left[e^{-t/T'_d} - \left(1 - \frac{T_D}{T''_d}\right)e^{-t/T''_d} - \frac{T_D}{T''_d}\,e^{-\alpha t}\cos\omega t\right].$$

Sachant que $e = x_{md}\,i_{f0}$ et $T'_{d0} - T'_d = \dfrac{x_{md}^2}{x_d\,\omega r_f}$, il vient :

$$\frac{e x_{md}}{\omega T'_d\,r_f\,x_d} = i_{f0}\left(\frac{T'_{do} - T'_d}{T'_d}\right) = i_{f0}\,\frac{x_d - x'_d}{x'_d}$$

d'où finalement l'expression de $i_f(t)$ en rajoutant la valeur initiale i_{f0} :

$$(7.41)\quad \begin{cases} i_f(t) = i_{f0} + i_{f0}\,\dfrac{x_d - x'_d}{x'_d}\left[e^{-t/T'_d} - \left(1 - \dfrac{T_D}{T''_d}\right)e^{-t/T''_d} - \cdots \right. \\ \qquad\qquad \left. \cdots - \dfrac{T_D}{T''_d}\,e^{-\alpha t}\cos\omega t\right]. \end{cases}$$

Sur la figure 7.4 est reproduit l'enregistrement oscillographique de $i_f(t)$ lors

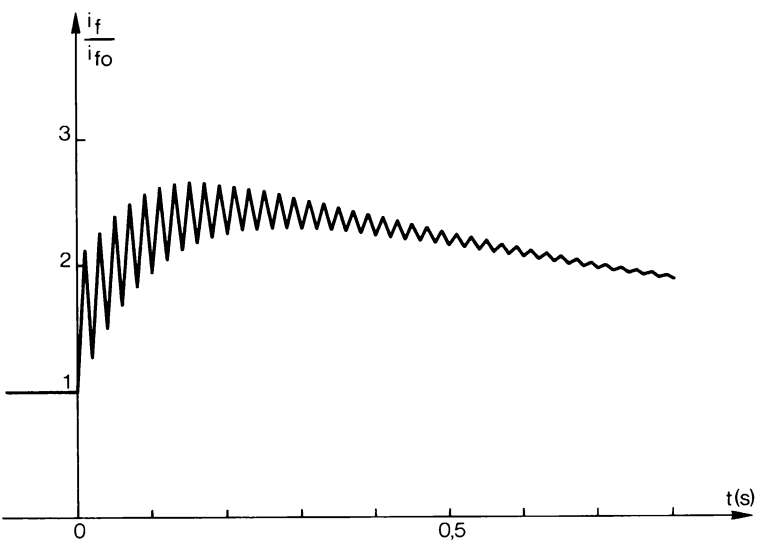


Fig. 7.4. — Exemple d'allure de l'évolution du courant inducteur lors d'un court-circuit triphasé brusque.

d'un essai de court-circuit triphasé. On y reconnaît les différents termes de (7.41) : une oscillation de pseudo-pulsation ω, amortie selon la loi $e^{-\alpha t}$ (extinction du flux dans l'induit), est superposée à une loi apparaissant comme la différence de deux exponentielles, l'une positive lentement amortie en $e^{-t/T_d'}$ (principalement conditionnée par l'extinction du flux dans l'inducteur), l'autre négative et rapidement amortie en $e^{-t/T_d''}$ (principalement conditionnée par l'extinction du flux dans l'amortisseur).

On trouvera en [13] et [18] des compléments d'étude sur ce problème.

3.4 Couple de court-circuit à vide (expression simplifiée)

Une variation brusque des conditions aux bornes de la machine synchrone se traduit également par l'apparition d'un couple électromagnétique dont l'amplitude peut être élevée et entraîner des contraintes mécaniques d'une part au niveau du ou des accouplements entre la machine synchrone et la ou les autres machines de la même ligne d'arbre, et d'autre part au niveau des raccordements entre les dents de l'induit, le circuit magnétique, la carcasse et le bâti.

L'expression temporelle du couple, en valeur réduite, est toujours donnée par

$$c_e = \omega(\psi_d\, i_q - \psi_q\, i_d)\,. \tag{6.9}$$

Compte tenu de (7.19), on doit prendre en compte dans cette expression d'une part les valeurs initiales, d'autre part les variations dont les expressions temporelles sont données, dans le cas général, par (7.30) pour le flux et (7.32) pour le courant, du moins dans le cadre des approximations faites (simplifications résultant des faibles valeurs des résistances).

Nous expliciterons le couple seulement en cas de court-circuit triphasé à vide (en charge, l'amplitude maximale est du même ordre de grandeur et la loi de variation est semblable). Il suffit alors de reporter dans (6.9) les expressions (7.36) et (7.37) d'où :

$$\begin{cases} c_e = e^2\left[\dfrac{1}{x_d} + \left(\dfrac{1}{x_d'} - \dfrac{1}{x_d}\right)e^{-t/T_d'} + \left(\dfrac{1}{x_d''} - \dfrac{1}{x_d'}\right)e^{-t/T_d''}\right]e^{-\alpha t}\sin\omega t + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + \dfrac{e^2}{2}\left(\dfrac{1}{x_q''} - \dfrac{1}{x_d''}\right)e^{-2\alpha t}\sin 2\,\omega t\,. \end{cases} \tag{7.42}$$

L'interprétation physique est très simple, en se reportant à la figure 7.2 : aux flux emprisonnés dans les enroulements rotor et stator est associé un couple proportionnel au sinus de l'angle de leurs axes magnétiques et qui se matérialise par l'allongement des lignes d'induction. Cet angle a pour valeur 0 à l'instant du court-circuit, varie en ωt, d'où le premier terme de (7.42), où apparaissent en outre les amortissements relatifs aux deux armatures en présence.

Le deuxième terme, en sin $2\,\omega t$, est un couple de réluctance « subtransitoire » dû à l'interaction entre les enroulements rotoriques en court-circuit, de structure anisotrope, et le flux emprisonné au stator.

La relation (7.42) obtenue à partir d'expressions simplifiées des flux et courants, n'est pas tout à fait rigoureuse : on n'y tient pas compte des termes résistifs dont l'amplitude maximale peut n'être pas du tout négligeable du fait de la valeur élevée des courants subtransitoires et de la résistance des amortisseurs.

Néanmoins c'est bien la valeur maximale de (7.42) qui est prépondérante aux premiers instants ; si on néglige les amortissements et si on suppose $x''_d = x''_q$, cette valeur maximale est égale à e^2/x''_d soit, d'après le paragraphe 6 ci-après, de l'ordre de quatre à cinq fois le couple nominal si $e = 1$ (court-circuit aux bornes à la tension nominale).

3.5 Exemple d'un autre type de variation brusque de tension : faux couplage

On appelle « faux couplage » le raccordement d'une machine synchrone à un réseau lorsque les conditions d'égalité de tension, de pulsation et de phase ne sont pas respectées. Nous allons ici considérer que seule n'est pas respectée l'égalité de phase.

La machine fonctionnant préalablement à vide, ses trois tensions de phase valent, conformément à (7.38) :

$$v_{a0} = e \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$v_{b0} = e \sin\left(\omega t + \theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_{c0} = e \sin\left(\omega t + \theta_0 - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Nous supposons alors que les tensions du réseau ont pour valeur :

$$v_{a1} = e \sin(\omega t + \theta_0 - \lambda)$$

$$v_{b1} = e \sin\left(\omega t + \theta_0 - \lambda - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_{c1} = e \sin\left(\omega t + \theta_0 - \lambda - \frac{4\pi}{3}\right).$$

L'angle λ caractérise donc l'écart de phase au moment du couplage. Pour le moment, nous supposons que le réseau est de puissance infinie, c'est-à-dire que l'amplitude, la fréquence et la phase de sa tension sont indépendantes des perturbations qui peuvent lui être appliquées.

Le couplage est effectué par la fermeture simultanée des trois interrupteurs K (fig. 7.5).

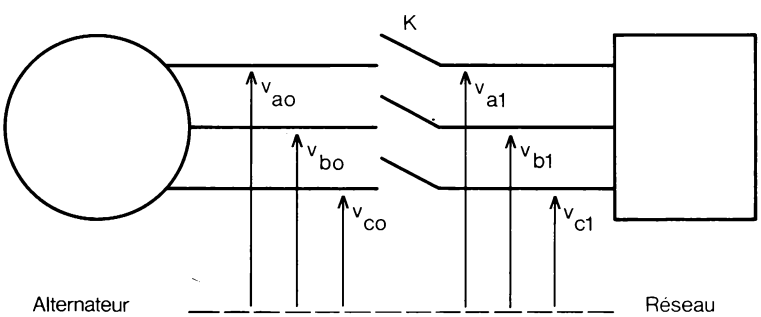


Fig. 7.5. — Situation préalable au couplage d'un alternateur au réseau.

L'ensemble des trois tensions v_{a0}, v_{b0}, v_{c0} prend alors brusquement les valeurs v_{a1}, v_{b1}, v_{c1}. On peut appliquer à ces deux systèmes la transformation de PARK (5.19), avec $\theta = \omega t + \theta_0$ d'où il résulte que les composantes de la tension de la machine sont :

$$\begin{cases} v_{d0} = 0 \\ v_{q0} = e \end{cases} \tag{7.43}$$

et les composantes de la tension du réseau :

$$\begin{cases} v_{d1} = -e \sin \lambda \\ v_{q1} = e \cos \lambda . \end{cases} \tag{7.44}$$

Ce résultat se retrouve aisément sur le diagramme vectoriel associé aux axes d et q (fig. 7.6)

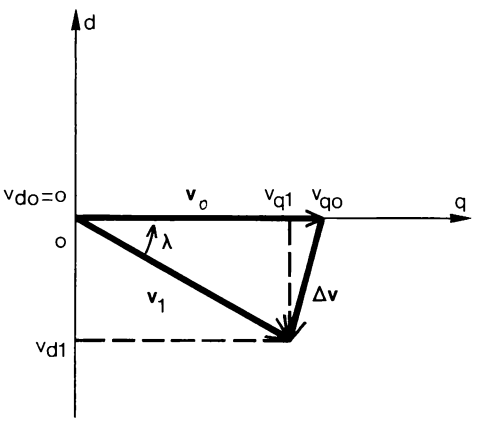


Fig. 7.6. — Représentation, dans les axes d et q, de la situation préalable à un faux couplage.

v_{d0} et v_{q0} sont les composantes du nombre complexe $\mathbf{v}_0$ associé à la tension de la machine, v_{d1} et v_{q1} sont les composantes de $\mathbf{v}_1$ associé à la tension du réseau, en retard de phase de λ sur $\mathbf{v}_0$.

La théorie générale du début du paragraphe 4 s'applique alors directement au cas présent.

On substitue (7.43) et (7.44) dans (7.20) d'où :

$$\begin{cases} \Delta v_{d0} = v_{d1} - v_{d0} = -2e \sin \dfrac{\lambda}{2} \cos \dfrac{\lambda}{2} \\ \Delta v_{q0} = v_{q1} - v_{q0} = -2e \sin^2 \dfrac{\lambda}{2} \end{cases} \tag{7.45}$$

Δv_{d0} et Δv_{q0} sont les composantes de la variation brusque subie par la tension de la machine synchrone, comme cela apparaît figure 7.6 où on a appelé $\Delta \mathbf{v}$ cette variation.

On reporte alors (7.45) dans (7.30) et (7.32) pour obtenir les courants, les flux, et poursuivre le calcul jusqu'au couple.

Le calcul ne présente pas de difficulté mais les expressions complètes sont un peu longues. Pour illustrer cependant cet exemple de régime transitoire nous allons évaluer l'amplitude maximale du courant et du couple dans les tout premiers instants, en négligeant tous les coefficients d'amortissement (de la forme α ou 1/T), ce qui revient à égaler à 1 les exponentielles, et en supposant en outre $x''_d = x''_q$.

On notera que les conditions initiales sont les mêmes que lors du court-circuit à vide, soit (7.35).

Dans ces conditions le report de (7.45) dans (7.32) donne :

$$(7.46)\qquad \begin{cases} i_d(t) = \Delta i_d(t) = \dfrac{2\,e}{x''_d} \sin\dfrac{\lambda}{2}\left[\sin\left(\omega t + \dfrac{\lambda}{2}\right) - \sin\dfrac{\lambda}{2}\right] \\ i_q(t) = \Delta i_q(t) = -\dfrac{2\,e}{x''_d} \sin\dfrac{\lambda}{2}\left[\cos\left(\omega t + \dfrac{\lambda}{2}\right) - \cos\dfrac{\lambda}{2}\right] \end{cases}$$

d'où le courant dans la phase *a*, en utilisant le même procédé et le même choix de valeurs réduites que pour obtenir (7.40) :

$$(7.47)\qquad i_a(t) = \frac{2\,e}{x''_d} \sin\frac{\lambda}{2}\left[\sin\left(\omega t + \theta_0 - \frac{\lambda}{2}\right) - \sin\left(\theta_0 - \frac{\lambda}{2}\right)\right].$$

La pointe maximum maximorum de courant instantané, dans le cas le plus défavorable, s'obtient en rendant maximaux tous les termes, on trouve donc successivement :

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_0 = 0, \quad \omega t = \pi$$

et dans ces conditions :

$$(7.48)\qquad i_a(\max) = \frac{4\,e}{x''_d}.$$

La pointe maximale de courant dans une phase a donc lieu, au bout d'une demi-période, lorsque le couplage se produit : 1° en opposition de phase ; 2° au moment du passage de l'inducteur devant la phase considérée. La pointe maximale est doublée par rapport au cas de court-circuit à vide, comme on peut le voir en comparant avec (7.40) conformément aux mêmes hypothèses ($\theta_0 = 0$ et amortissements négligés).

En ce qui concerne le couple, on remarque tout d'abord que les hypothèses simplificatrices ci-dessus font que les expressions opérationnelles (7.23) et (7.24) donnent lieu aux expressions temporelles :

$$\Delta\psi_d(t) = \frac{x''_d}{\omega}\,\Delta i_d(t)$$

$$\Delta\psi_q(t) = \frac{x''_d}{\omega}\,\Delta i_q(t)$$

donc, dans l'expression (6.9) du couple, les termes $\Delta\psi_d\,\Delta i_q$ et $\Delta\psi_q\,\Delta i_d$ s'éliminent et, compte tenu des conditions initiales (7.43) il reste seulement :

$$c_e = \omega\psi_{d0}\,\Delta i_q(t) = \omega\psi_{d0}\,i_q(t)$$

soit, utilisant (7.35) et (7.46) :

$$c_e = \frac{e^2}{x_d''}\left[\sin\lambda - 2\sin\frac{\lambda}{2}\cos\left(\omega t + \frac{\lambda}{2}\right)\right] \tag{7.49}$$

le maximum maximorum correspond à

$$\cos\left(\omega t + \frac{\lambda}{2}\right) = \pm 1\,, \qquad \lambda = \mp\frac{2\pi}{3}\,,$$

soit un couplage dit « à 120° », et dans ces conditions la pointe maximale de couple vaut, en valeur absolue

$$c_e(\max) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\frac{e^2}{x_d''}\,. \tag{7.50}$$

Elle serait donc théoriquement 2,6 fois plus élevée que dans le cas du court-circuit à vide (comme on peut le voir d'après (7.42) en y faisant les mêmes hypothèses) ; en pratique le faux couplage ne s'effectue jamais sur une source idéale telle que celle envisagée au début de ce paragraphe, mais par l'intermédiaire d'une impédance de liaison résultant de la présence du transformateur et des lignes de raccordement. Cette impédance doit donc être prise en compte dans les équations de la machine comme il sera indiqué au paragraphe 7.5, et notamment la réactance x_e doit être ajoutée à x_d'' dans (7.48) et (7.50) ce qui contribue à réduire les contraintes maximales annoncées.

Pour une étude plus rigoureuse des contraintes en couple consécutives à un faux couplage, et même en restant dans l'hypothèse de vitesse invariable, c'est-à-dire en considérant toujours les tout premiers instants, il faudrait d'une part considérer les amortissements, comme cela a été fait lors de l'étude du court-circuit, et d'autre part tenir compte des termes résistifs qui ont été négligés au début du paragraphe 3.

4 EXEMPLE DE VARIATION BRUSQUE DE COURANT : RÉTABLISSEMENT DE TENSION LORS DU DÉCLENCHEMENT D'UN COURT-CIRCUIT TRIPHASÉ PERMANENT

La machine synchrone étant supposée en court-circuit triphasé permanent, on ouvre brusquement la connexion de court-circuit et on se propose d'étudier l'évolution de la tension aux bornes des phases de l'induit ; la tension d'excitation v_f et la vitesse ω sont supposées invariables pendant le processus.

Lors du régime initial on négligera l'influence de la résistance r_a ; celle-ci n'intervient d'ailleurs pas non plus après le déclenchement, on peut donc la supposer nulle.

Le régime avant déclenchement est alors caractérisé par les valeurs suivantes, tirées de (6.45) et (6.49), avec r_a négligé :

$$(7.51) \qquad v_{d0} = v_{q0} = \psi_{d0} = \psi_{q0} = i_{q0} = 0 \; ; \qquad i_{d0} = -\frac{e_0}{x_d}.$$

La méthode de superposition, basée sur les relations (7.19), est alors appliquée aux équations (7.1), (7.2), (7.6) et (7.7) qui concernent, rappelons-le, les variations Δ. La perturbation appliquée est un échelon de courant qui s'écrit, d'après (7.51) et (7.19)

$$\Delta i_d(t)\,(t > 0) = -\,i_{d0} \Rightarrow \Delta i_d(p) = -\frac{i_{d0}}{p} = \frac{e_0}{x_d\, p}$$

$$\Delta i_q(t)\,(t > 0) = 0 \qquad \Rightarrow \Delta i_q(p) = 0$$

soit, en portant dans (7.6) et (7.7)

$$\Delta\psi_d(p) = l_d(p)\,\Delta i_d(p) = \frac{e_0}{x_d\, p}\, l_d(p)$$

$$\Delta\psi_q(p) = 0$$

puis dans (7.1) et (7.2)

$$(7.52) \qquad \begin{cases} \Delta v_d(p) = -\,p\,\Delta\psi_d(p) = -\dfrac{e_0}{x_d}\, l_d(p) \\ \Delta v_q(p) = \omega\,\Delta\psi_d(p) = \dfrac{\omega e_0}{p x_d}\, l_d(p) \end{cases}$$

$l_d(p)$ étant exprimé sous forme de fraction rationnelle (7.12) on décompose les relations ci-dessus en fractions élémentaires ; les inégalités (7.11) permettent de simplifier les expressions en négligeant les T″ devant les T′ dans les termes de la forme (T′ − T″). Utilisant en outre les relations (7.16) et (7.18), les relations (7.52) s'écrivent

$$(7.53) \qquad \begin{cases} \Delta v_d(p) = v_d(p) = -\dfrac{e_0}{x_d}\left[\dfrac{x_d}{\omega} + \dfrac{(x_d - x'_d)}{\omega(1 + \mathrm{T}'_{do}\, p)} + \dfrac{(x'_d - x''_d)}{\omega(1 + \mathrm{T}''_{do}\, p)}\right] \\ \Delta v_q(p) = v_q(p) = \dfrac{e_0}{x_d}\left[\dfrac{x_d}{p} - \dfrac{\mathrm{T}'_{do}(x_d - x'_d)}{1 + \mathrm{T}'_{do}\, p} - \dfrac{\mathrm{T}''_{do}(x'_d - x''_d)}{1 + \mathrm{T}''_{do}\, p}\right]. \end{cases}$$

Nous voyons apparaître dans l'expression de $v_d(p)$:

1° Une constante, dont l'original est l'impulsion unité (grandeur infinie pendant un temps infiniment court) ; cette impulsion résulte de la coupure du circuit inductif ; en pratique la surtension est limitée par l'arc qui apparaît entre les pôles du disjoncteur ; sa durée étant très brève, il n'est pas utile de la faire figurer dans le résultat de notre calcul.

2° Deux fractions rationnelles du premier degré en p, dont on voit qu'elles sont négligeables devant leurs homologues figurant dans l'expression de $v_q(p)$, ω étant très grand devant $1/\mathrm{T}'_{do}$ et $1/\mathrm{T}''_{do}$.

Seul reste donc $v_q(p)$, dont l'original est :

$$(7.54) \qquad v_q(t) = \frac{e_0}{x_d}\left[x_d - (x_d - x'_d)\,e^{-t/T'_{do}} - (x'_d - x''_d)\,e^{-t/T''_{do}}\right].$$

Pour obtenir la tension d'une phase, par exemple v_a, nous utilisons (5.24) et (7.34) d'où :

$$(7.55) \quad v_a(t) = \frac{e_0}{x_d}\left[x_d - (x_d - x'_d)\,e^{-t/T'_{do}} - (x'_d - x''_d)\,e^{-t/T''_{do}}\right]\sin(\omega t + \theta_0).$$

Un exemple d'enregistrement oscillographique de ce phénomène est représenté figure 7.7.

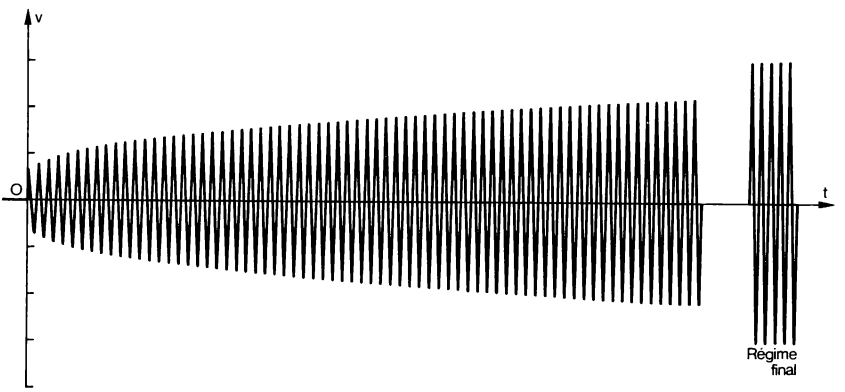


Fig. 7.7. — Oscillogramme de rétablissement de la tension d'une phase de l'induit lors de l'ouverture d'un court-circuit triphasé.

On peut y constater la grande différence entre T''_{do} et T'_{do} : le régime subtransitoire est très court par rapport au régime transitoire. A partir d'un tel enregistrement, obtenu à partir de ce régime transitoire réalisé à titre expérimental, on peut mesurer x'_d et T'_{do} puis x''_d et T''_{do}, par une méthode similaire à celle exposée au paragraphe 3.3.3.

5 ORDRE DE GRANDEUR DES DIFFÉRENTES RÉACTANCES ET CONSTANTES DE TEMPS

Les diverses réactances exprimées en valeurs réduites, et les diverses constantes de temps des machines synchrones ont des valeurs tout à fait comparables sur une assez large gamme de puissances.

Il faut cependant faire les réserves suivantes :

1° les ordres de grandeur sont un peu modifiés selon que l'on considère une machine synchrone à pôles saillants ou à entrefer constant ;

2° lorsque la puissance nominale diminue les réactances en valeur réduite et les constantes de temps ont tendance à diminuer. Les valeurs données ci-après sont valables dans une gamme de puissance allant de 1 MVA à 200 MVA. Entre parenthèses est éventuellement indiquée la valeur la plus fréquemment rencontrée :

	Machines à pôles saillants	Machines à entrefer constant
x_d	0,9-1,5 (1,2)	1,5-2,5 (2)
x_q	0,5-1,1 (0,9)	$= x_d$
x'_d	0,3-0,5 (0,4)	0,2-0,35 (0,25)
x''_d	0,25-0,35 (0,3)	0,15-0,25 (0,2)
x''_q	$\simeq x''_d$	$\simeq x''_d$
T'_{do} (s)	3-8 (5)	8-12 (10)
T'_d (s)	1-2 (1,5)	1-1,5 (1,2)
T''_d (s)	0,02-0,05 (0,04)	0,02-0,05 (0,04)
T''_q (s)	$\simeq T''_d$	$\simeq T''_d$
T_D (s)	$\sim$ 0,02	$\sim$ 0,02
T_a (s)	0,1-0,2	0,1-0,2

T''_{do} et T''_{qo} pouvant se déduire de T''_d et T''_q par les relations (7.16) et (7.17).

L'examen de ce tableau suscite les observations suivantes :

— on constate bien que les quantités de la forme 1/T, T étant une constante de temps, sont faibles devant ω, du moins pour les machines fonctionnant à la pulsation du réseau (314 rad/s en France), ce qui justifie les approximations faites lors de la mise en forme opérationnelle (§ 2) et du calcul du courant de court-circuit (§ 3).

Les expressions des réactances et constantes de temps établies au paragraphe 7 sont la plupart du temps des expressions simplifiées autorisées par les inégalités (7.11). On constate que cette approximation est assez bien justifiée.

6 SIMPLIFICATION DES CALCULS LORSQU'ON NÉGLIGE LA PRÉSENCE DES AMORTISSEURS

On a pu constater, au cours des divers exemples traités dans ce chapitre, qu'à la suite d'une perturbation brusque les amortisseurs n'interviennent qu'aux tout premiers instants, et qu'au bout d'un temps relativement court, de l'ordre de 0,1 s, les exponentielles associées aux constantes de temps subtransitoires sont pratiquement éteintes.

Cette circonstance permet de simplifier l'étude de certains problèmes, notamment lorsqu'on s'intéresse à l'évolution sur une période de temps assez longue, en négligeant simplement la présence des amortisseurs.

Dans ce qui suit nous allons donner quelques indications sur les conséquences de cette simplification en vue de faciliter sa mise en œuvre le cas échéant.

En ce qui concerne le paragraphe 2 ci-dessus, les modifications sont les suivantes :

— suppression des deuxième et troisième équations (7.3),

— suppression des dernières ligne et colonne de (7.4) et (7.5),

— les fractions rationnelles $l_d(p)$, $g(p)$, $l_q(p)$ perdent un degré en p au numérateur et au dénominateur, et leur nouvelle expression s'obtient à partir de (7.8), (7.9) et (7.10) en annulant T''_d, T''_{dv}, T_D, T''_q, T''_{qv}. (En conséquence, dans (7.10), $l_q(p)$ se réduit à la constante l_q). Le même procédé s'applique pour obtenir les nouvelles expressions de (7.12), (7.13), (7.14), (7.15).

En ce qui concerne le paragraphe 7.3, les expressions des grandeurs synchrones et transitoires sont conservées.

Enfin, en ce qui concerne les applications traitées à partir du paragraphe 3, les calculs peuvent être repris en tenant compte des considérations ci-dessus ; on peut également corriger d'emblée les résultats moyennant les modalités suivantes :

a) l'expression (7.26) du coefficient d'amortissement de l'induit devient

$$\alpha = \frac{r_a \omega}{2}\left(\frac{1}{x'_d} + \frac{1}{x_q}\right) = \frac{1}{T_a}$$

b) dans les expressions temporelles associées aux régimes transitoires, c'est-à-dire celles où figurent des exponentielles décroissantes en fonction du temps, il suffit d'annuler tous les termes s'amortissant avec une constante de temps subtransitoire et d'autre part, dans les termes en $e^{-\alpha t}$ ou en $e^{-2\alpha t}$, α ayant la nouvelle valeur ci-dessus, il convient de remplacer x''_d par x'_d et x''_q par x_q.

Ce traitement ne s'applique cependant pas directement au cas du courant inducteur. En particulier, dans l'expression (7.41), le crochet doit s'écrire, en l'absence d'amortisseurs :

$$[e^{-t/T'_d} - e^{-\alpha t} \cos \omega t] .$$

7 EXPRESSIONS DES RÉACTANCES ET CONSTANTES DE TEMPS SCHÉMAS ÉQUIVALENTS SATURATION

7.1 Schémas équivalents, avec hypothèse d'égalité des inductances mutuelles dans l'axe direct

Les équations (7.4) et (7.5) peuvent se traduire par des schémas équivalents analogues à ceux des transformateurs respectivement à trois et deux enroulements. En ce qui concerne l'axe direct, le schéma équivalent a une structure particulièrement simple si on fait l'hypothèse dite « de l'égalité des inductances mutuelles », consistant à considérer que le flux d'induction commun à deux enroulements quelconques traverse intégralement le troisième, ou, autrement dit, qu'il n'y a pas de lignes d'induction communes à deux enroulements et ne traversant pas le troisième.

Cette hypothèse se traduit, en valeurs réduites, par l'égalité :

$$m_{af} = m_{aD} = m_{fD} (= l_{md}) . \tag{7.56}$$

Nous noterons l_{md} la valeur commune de ces trois inductances mutuelles et nous l'appellerons « inductance de magnétisation d'axe direct ».

Par raison de cohérence nous donnerons à m_{aQ} la notation l_{mq}, appelé « inductance de magnétisation d'axe en quadrature ».

$$m_{aQ} = l_{mq} . \tag{7.57}$$

Alors, pour chaque enroulement, la différence entre son inductance propre et l'inductance commune traduit les fuites propres à cet enroulement. Nous notons donc

$$\begin{cases} l_d = l_{md} + l_a \\ l_{ff} = l_{md} + l_f \\ l_{DD} = l_{md} + l_D \\ l_q = l_{mq} + l_a \\ l_{QQ} = l_{mq} + l_Q \end{cases} \tag{7.58}$$

(on a admis que l'inductance de fuites du stator l_a est la même dans les deux axes).

Les équations (7.4) et (7.5) se réécrivent alors :

$$\begin{vmatrix} \psi_d \\ \dfrac{v_f}{p} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_a + l_{md} & l_{md} & l_{md} \\ l_{md} & \dfrac{r_f}{p} + l_f + l_{md} & l_{md} \\ l_{md} & l_{md} & \dfrac{r_D}{p} + l_D + l_{md} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_d \\ i_f \\ i_D \end{vmatrix} \tag{7.59}$$

$$\begin{vmatrix} \psi_q \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_a + l_{mq} & l_{mq} \\ l_{mq} & \dfrac{r_Q}{p} + l_Q + l_{mq} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_q \\ i_Q \end{vmatrix} . \tag{7.60}$$

Ces équations se traduisent immédiatement par les schémas équivalents des figures 7.8 et 7.9

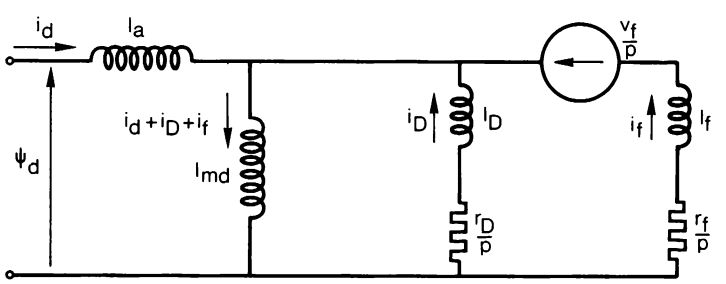


Fig. 7.8. — Schéma équivalent d'axe direct, dans l'hypothèse d'égalité des inductances mutuelles.

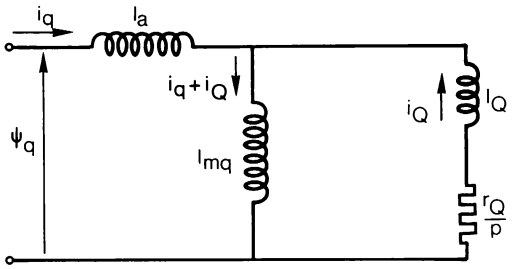


Fig. 7.9. — Schéma équivalent d'axe en quadrature.

7.2 Expressions des réactances et constantes de temps

La résolution de (7.59), ou du schéma de la figure 7.8, conduit pour $l_d(p)$ et $g(p)$ à des expressions de la forme :

$$l_d(p) = l_d \frac{1 + (T_4 + T_5)\,p + T_4\,T_6\,p^2}{1 + (T_1 + T_2)\,p + T_1\,T_3\,p^2} \tag{7.61}$$

$$g(p) = \frac{l_{md}}{r_f} \frac{1 + T_D\,p}{1 + (T_1 + T_2)\,p + T_1\,T_3\,p^2} \tag{7.62}$$

dans lesquelles les différents T s'expriment en fonction des inductances et résistances de (7.59).

Pour une simple commodité d'ordres de grandeur numériques, nous allons *multiplier toutes les inductances par* ω et les noter x sans changement d'indice. Le calcul complet donne :

$$T_1 = \frac{1}{\omega r_f}(x_f + x_{md})$$

$$T_2 = \frac{1}{\omega r_D}(x_D + x_{md})$$

$$T_3 = \frac{1}{\omega r_D}\left(x_D + \frac{x_{md}\,x_f}{x_{md} + x_f}\right)$$

$$T_4 = \frac{1}{\omega r_f}\left(x_f + \frac{x_{md}\,x_a}{x_{md} + x_a}\right)$$

$$T_5 = \frac{1}{\omega r_D}\left(x_D + \frac{x_{md}\,x_a}{x_{md} + x_a}\right)$$

$$T_6 = \frac{1}{\omega r_D}\left(x_D + \frac{x_{md}\,x_f\,x_a}{x_{md}\,x_a + x_{md}\,x_f + x_f\,x_a}\right)$$

$$T_D = \frac{x_D}{\omega r_D}.$$

On constate, par observation de la figure 7.8, que toutes ces constantes de temps caractérisent le comportement des branches f ou D, lorsqu'on met en court-circuit ou à circuit ouvert certains éléments des autres branches.

L'obtention rigoureuse des constantes de temps figurant dans (7.8) nécessiterait son identification avec (7.61), soit :

$$(7.63) \qquad (1 + T'_{do}\, p)(1 + T''_{do}\, p) \equiv 1 + (T_1 + T_2)\, p + T_1\, T_3\, p^2$$

$$(7.64) \qquad (1 + T'_{d}\, p)(1 + T''_{d}\, p) \equiv 1 + (T_4 + T_5)\, p + T_4\, T_6\, p^2 .$$

L'approximation annoncée précédemment consiste à utiliser le fait que les amortisseurs, ayant une section de cuivre bien plus faible que l'inducteur, ont une résistance en valeur réduite r_D bien supérieure à r_f ; en conséquence :

— dans (7.63) T_2 et T_3 étant petits devant T_1, on peut remplacer $T_1 + T_2$ par $T_1 + T_3$; le deuxième membre se factorise et on est conduit à assimiler T_1 à T'_{do} d'une part, T_3 à T''_{do} d'autre part ;

— dans (7.64) T_5 et T_6 étant petits devant T_4, on peut remplacer $T_4 + T_5$ par $T_4 + T_6$; le deuxième membre se factorise et on est conduit à assimiler T_4 à T'_d d'une part, T_6 à T''_d d'autre part.

Dans l'axe en quadrature, il n'est pas nécessaire de faire de telles approximations : la résolution de (7.60) sous la forme (7.7) et son identification avec (7.10) donnent directement les constantes de temps T''_q et T''_{qo} qui seront explicitées ci-dessous.

Enfin les réactances x'_d, x''_d et x''_q sont obtenues en utilisant les relations (7.16), (7.17), (7.18).

7.3 Répertoire des réactances et constantes de temps de la machine synchrone

Rappelons que certaines de ces formules sont rigoureuses, d'autres représentent une bonne approximation, conformément à l'analyse faite plus haut.

$$x_d = x_a + x_{md}$$
= réactance synchrone longitudinale

$$x'_d \# x_a + \frac{x_{md}\, x_f}{x_{md} + x_f}$$
= réactance transitoire longitudinale

$$x''_d = x_a + \frac{x_{md}\, x_f\, x_D}{x_{md}\, x_f + x_f\, x_D + x_D\, x_{md}}$$
= réactance subtransitoire longitudinale

$$x_q = x_a + x_{mq}$$
= réactance synchrone transversale

$$x''_q = x_a + \frac{x_{mq}\, x_Q}{x_{mq} + x_Q}$$
= réactance subtransitoire transversale

$$T'_{do} \# \frac{1}{\omega r_f}(x_f + x_{md})$$

= constante de temps transitoire longitudinale à circuit ouvert

$$T''_{do} \# \frac{1}{\omega r_D}\left(x_D + \frac{x_{md}\, x_f}{x_{md} + x_f}\right)$$

= constante de temps subtransitoire longitudinale à circuit ouvert

$$T'_d \# \frac{1}{\omega r_f}\left(x_f + \frac{x_{md}\, x_a}{x_{md} + x_a}\right)$$

= constante de temps transitoire longitudinale en court-circuit

$$T''_d \# \frac{1}{\omega r_D}\left(x_D + \frac{x_{md}\, x_f\, x_a}{x_{md}\, x_f + x_f\, x_a + x_a\, x_{md}}\right)$$

= constante de temps subtransitoire longitudinale en court-circuit

$$T_D = \frac{x_D}{\omega r_D}$$

= constante de temps des fuites d'amortisseur d'axe direct

$$T''_{qo} = \frac{1}{\omega r_Q}(x_Q + x_{mq})$$

= constante de temps subtransitoire transversale à circuit ouvert

$$T''_q = \frac{1}{\omega r_Q}\left(x_Q + \frac{x_{mq}\, x_a}{x_{mq} + x_a}\right)$$

= constante de temps subtransitoire transversale en court-circuit.

7.4 Schéma équivalent amélioré, dans l'axe direct, tenant compte des fuites communes entre inducteur et amortisseurs

Pour certaines applications, il est nécessaire de tenir compte du fait que, l'inducteur et l'amortisseur se trouvant d'un même côté de l'entrefer, et l'induit de l'autre côté, l'hypothèse d'égalité des inductances mutuelles peut se trouver en défaut.

La méthode la plus simple, suggérée dans [13], [14], [15], [18], [19] consiste à supposer égales les inductances mutuelles de l'induit avec l'inducteur d'une part, l'amortisseur d'autre part, mais à affecter par contre une valeur différente à l'inductance mutuelle entre l'induit et l'amortisseur. Cette méthode conduit à poser, à partir des équations (7.4)

$m_{af} = m_{aD} = l_{md}$ (définition de l_{md})

$l_d = l_{md} + l_a$ (définition de l_a)

$m_{fD} = l_{md} + l_{fD}$ (définition de l_{fD}, dite « inductance de fuites communes entre l'inducteur et l'amortisseur »)

$l_{ff} = l_{md} + l_{fD} + l_f$ (nouvelle définition de l_f)

$l_{DD} = l_{md} + l_{fD} + l_D$ (nouvelle définition de l_D).

Les relations (7.4) donnent alors lieu aux relations suivantes, que l'on comparera à (7.59)

$$\begin{array}{|c|} \psi_d \\ \hline \dfrac{v_f}{p} \\ \hline 0 \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} l_a + l_{md} & l_{md} & l_{md} \\ \hline l_{md} & \dfrac{r_f}{p} + l_f + l_{fD} + l_{md} & l_{fD} + l_{md} \\ \hline l_{md} & l_{fD} + l_{md} & \dfrac{r_D}{p} + l_D + l_{fD} + l_{md} \end{array} \times \begin{array}{|c|} i_d \\ \hline i_f \\ \hline i_D \end{array}$$

conduisant au schéma équivalent de la figure 7.10 et aux nouvelles expressions des réactances et constantes de temps d'axe direct (les réactances figurant ci-dessous étant obtenues en multipliant par ω les inductances correspondantes) :

$$T'_{do} \# \frac{1}{\omega r_f}(x_{md} + x_{fD} + x_f)$$

$$T'_d \# \frac{1}{\omega r_f}\left(x_{fD} + x_f + \frac{x_{md}\, x_a}{x_{md} + x_a}\right)$$

$$T''_{do} \# \frac{1}{\omega r_D}\left(x_D + \frac{x_f(x_{md} + x_{fD})}{x_{md} + x_{fD} + x_f}\right)$$

$$T''_d \# \frac{1}{\omega r_D}\left(x_D + \frac{x_{md}\, x_{fD}\, x_f + x_{md}\, x_a\, x_f + x_a\, x_{fD}\, x_f}{x_{md}(x_a + x_{fD} + x_f) + x_a(x_{fD} + x_f)}\right)$$

$$T_D = \frac{x_D}{\omega r_D}$$

$$x_d = x_a + x_{md}$$

$$x'_d \# x_a + \frac{x_{md}(x_{fD} + x_f)}{x_{md} + x_{fD} + x_f}$$

$$x''_d = x_a + \frac{x_{md}\, x_f\, x_D + x_{md}\, x_{fD}\, x_D + x_{md}\, x_{fD}\, x_f}{x_D(x_{md} + x_{fD} + x_f) + x_f(x_{md} + x_{fD})}.$$

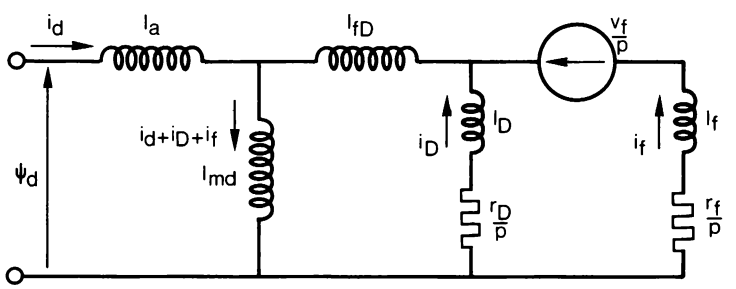


Fig. 7.10. — Schéma équivalent « amélioré » d'axe direct, prenant en compte les fuites communes à l'inducteur et à l'amortisseur.

On doit noter que x_{fD} n'est pas une quantité nécessairement positive et de fait dans [13], [14], [15] elle est trouvée positive pour les machines synchrones à entrefer constant, négative pour les machines synchrones à pôles saillants.

La prise en compte de la réactance de fuites communes x_{fD} *n'apporte pratiquement pas de modification ni qualitative ni quantitative* au calcul du courant dans l'induit et du couple électromagnétique lors des régimes transitoires. Elle se manifeste essentiellement au niveau du comportement de l'enroulement inducteur vis-à-vis des fréquences relativement élevées (de l'ordre de 50 Hz) et il n'est donc avantageux de la prendre en compte que pour une catégorie très restreinte de problèmes.

N.B. : Une méthode élégante de prise en compte des inductances mutuelles inégales, que l'on trouvera exposée par exemple en [21], consiste tout simplement à opérer, à partir de (7.4), sur les courants i_f et i_D (donc sur la tension v_f) un changement d'échelle rétablissant l'égalité des trois inductances mutuelles. On vérifiera que ce changement d'échelle s'écrit :

$$i'_f = \frac{m_{fD}}{m_{aD}} i_f \quad \left(\text{et donc : } v'_f = \frac{m_{aD}}{m_{fD}} v_f\right)$$

$$i'_D = \frac{m_{fD}}{m_{af}} i_D \,.$$

7.5 Intérêt des schémas équivalents

Bien qu'ils n'apportent pas d'information nouvelle par rapport au système d'équations de départ, les schémas équivalents sont utiles pour les raisons suivantes :

a) Ils permettent une meilleure compréhension de certains phénomènes :

— distinction entre régimes permanent, transitoire et subtransitoire : chaque branche du schéma équivalent joue un rôle particulier vis-à-vis de ces régimes ; ce rôle apparaît notamment lorsqu'on observe les expressions des réactances et constantes de temps aux paragraphes précédents,

— les surtensions susceptibles d'affecter le système d'excitation lorsqu'il est alimenté par des redresseurs peuvent être interprétées en considérant que dans la branche f le courant ne peut alors circuler que dans un sens,

— l'étude des régimes harmoniques ou asynchrones peut être effectuée par la méthode des nombres complexes. Il suffit alors dans les schémas de remplacer l'opérateur p par son équivalent harmonique, produit de j par la pulsation de sollicitation.

b) Ils rendent plus facile la prise en compte de la saturation comme on va le voir au paragraphe suivant.

7.6 Prise en compte de la saturation

La saturation, étant un phénomène local, devrait en toute rigueur être traitée en considérant la distribution réelle de l'induction et non pas le premier harmonique de sa décomposition en série de FOURIER ; la méthode d'approche esquissée ici, basée sur l'hypothèse sinusoïdale, ne constitue donc qu'une première appro-

ximation, qui permet cependant une amélioration notable de la précision des modèles.

On peut estimer que la saturation affecte principalement le trajet du flux commun aux enroulements et beaucoup moins les trajets de fuites. Dans ces conditions on peut faire intervenir la saturation au niveau des termes l_{md} et l_{mq} des équations (7.59) et (7.60) (ou des schémas fig. 7.8 et 7.9).

La caractéristique de saturation à prendre en compte est simplement déduite de la caractéristique à vide qui fournit directement une loi :

$$\psi_{do} = f(i_f)$$

dont l'allure est reproduite figure 7.11.

La courbe $f(i_f)$ se réduit dans la partie non saturée à une droite de pente l_{md}.

En charge, ou en régime transitoire, le flux correspondant aux trajets communs, souvent appelé flux résultant et que nous caractérisons par l'indice r, correspond en non saturé aux termes tirés des expressions (7.59) et (7.60) :

$$\psi_{rd} = l_{md}(i_d + i_f + i_D)$$
$$\psi_{rq} = l_{mq}(i_q + i_Q).$$

Lorsque la saturation intervient, les courants doivent être augmentés pour obtenir le même flux. Au lieu de diminuer l_{md} et l_{mq}, il est plus commode, en vue d'un traitement sur ordinateur, de conserver leurs valeurs non saturées mais de corriger les expressions précédentes par l'introduction de « courants de saturation » i_{sd} et i_{sq}

$$\psi_{rd} = l_{md}(i_d + i_f + i_D - i_{sd})$$
$$\psi_{rq} = l_{mq}(i_q + i_Q - i_{sq}).$$

L'évaluation du courant de saturation se fait à partir de la caractéristique à vide figure 7.11 dont la loi peut s'écrire :

$$l_{md}\, i_f = g(\psi_{do})$$

g étant la fonction inverse de f, au coefficient l_{md} près.

Supposons que g soit approchée par une expression de la forme :

$$g(\psi_{do}) = \psi_{do}(1 + k\psi_{do}^{l})$$

le courant de saturation à vide est alors obtenu par différence (voir fig. 7.11) :

$$l_{md}\, i_s = g(\psi_{do}) - \psi_{do} = k\psi_{do}^{l+1}.$$

Dans le cas des machines à entrefer constant, on admet l'hypothèse de POTIER selon laquelle la saturation en charge obéit à la même loi qu'à vide, quelle que soit la direction du champ résultant, et on admet que pour ces machines

$$l_{md} \approx l_{mq}.$$

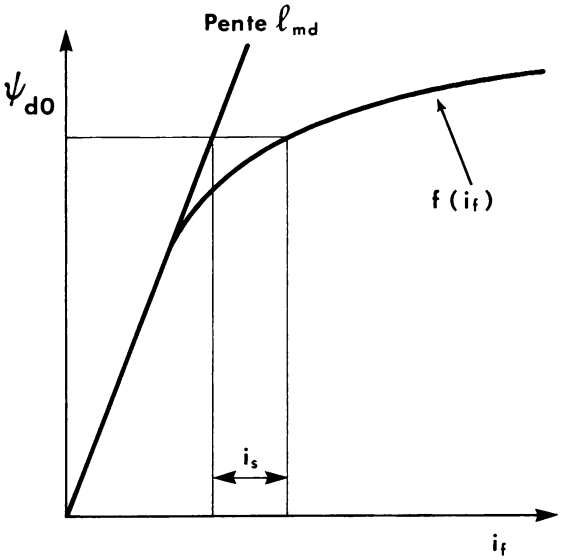


Fig. 7.11. — Caractéristique à vide.

Il en résulte qu'en charge le courant de saturation i_s est en phase avec le flux résultant ψ_r et lui est lié par la même relation que ci-dessus, soit

$$l_{md}\, i_s = k\psi_r^{l+1}$$

avec

$$\psi_r = \sqrt{\psi_{rd}^2 + \psi_{rq}^2}$$

et que les composantes i_{sd} et i_{sq} sont dans le même rapport que ψ_{rd} et ψ_{rq} d'où

$$i_{sd} = \frac{\psi_{rd}}{\psi_r}\, i_s$$

$$i_{sq} = \frac{\psi_{rq}}{\psi_r}\, i_s .$$

L'application de cette méthode implique de déterminer d'abord le flux, puis le courant de saturation. Le processus de calcul est bien sûr itératif.

Dans le cas de machines à pôles saillants, le problème est un peu plus complexe du fait que $l_{md} \neq l_{mq}$ et que la saturation affecte différemment les deux composantes du flux.

On peut néanmoins supposer en première approximation que la saturation affecte principalement l'axe direct. Cela revient à négliger i_{sq} et à calculer i_{sd} par la relation

$$l_{md}\, i_{sd} = k\psi_{rd}^{l+1} .$$

Remarque : L'adoption d'une formulation analytique simple pour la caractéristique de saturation facilite la mise en œuvre des calculs de régimes transitoires.

7.7 Prise en compte d'une impédance en série avec la machine synchrone

Dans l'étude des régimes transitoires — comme des régimes permanents — d'une machine synchrone, on est souvent amené à considérer le cas où cette machine est raccordée au milieu extérieur par l'intermédiaire d'une impédance en série ; lors des perturbations affectant la machine et intéressant aussi cette impédance, les régimes transitoires sont modifiés par sa présence. Ainsi qu'il sera expliqué plus en détail au début du chapitre X, il est possible de tenir compte simplement de cette impédance si elle peut être caractérisée par une résistance r_e en série avec une réactance x_e (exprimées en p.u. ramenés aux caractéristiques nominales de la machine synchrone).

Il suffit alors de considérer la machine synchrone et l'impédance série comme une nouvelle machine synchrone dont l'induit aurait

— pour résistance

$$r_{ae} = r_a + r_e$$

— pour réactance de fuites

$$x_{ae} = x_a + x_e .$$

Les réactances synchrones, transitoires, subtransitoires sont toutes augmentées de la quantité x_e, comme il résulte des expressions établies aux paragraphes 7.3. et 7.4. Nous noterons les nouvelles valeurs :

$$\begin{aligned} x_{de} &= x_d + x_e \\ x'_{de} &= x'_d + x_e \\ x''_{de} &= x''_d + x_e \\ x_{qe} &= x_q + x_e \\ x''_{qe} &= x''_q + x_e . \end{aligned}$$

En ce qui concerne les constantes de temps, on constate aux mêmes paragraphes que T'_{do}, T''_{do}, T''_{qo} ne dépendent pas de x_a donc ne sont pas affectées (ce qui est physiquement évident).

On peut alors évaluer les nouvelles constantes de temps en court-circuit à l'aide des relations (7.16) à (7.18), ce qui donne, en les caractérisant par l'indice e :

$$T'_{de} \# T'_{do} \frac{x'_{de}}{x_{de}}$$

$$T''_{de} \# T''_{do} \frac{x''_{de}}{x'_{de}}$$

$$T''_{qe} = T''_{qo} \frac{x''_{qe}}{x_{qe}} .$$

Il résulte des remarques faites au long de ce chapitre que certaines de ces relations relatives à l'axe direct, ne sont pas absolument rigoureuses, et ne constituent une bonne approximation que sous réserve du respect des inégalités (7.11).

Le coefficient d'amortissement de l'induit, défini en (7.26), est également modifié et devient :

$$\alpha_e = \frac{r_{ae}\,\omega}{2}\left(\frac{1}{x''_{de}} + \frac{1}{x''_{qe}}\right) = \frac{1}{T_{ae}}.$$

CHAPITRE VIII

RÉGIMES PERMANENTS A VITESSE NON SYNCHRONE

Lorsque la vitesse de rotation est constante, les équations électriques et magnétiques représentant le fonctionnement de la machine synchrone, dans le système d'axes d et q, sont linéaires, et la solution de régime permanent des courants, tensions, flux, est sinusoïdale en fonction du temps, donc peut être obtenue par un calcul en nombres complexes. Dans ce chapitre sont donnés quelques exemples d'application de cette méthode.

1 FONCTIONNEMENT ASYNCHRONE DES MACHINES SYNCHRONES

1.1 Introduction et hypothèses

Cette étude s'applique particulièrement au problème du démarrage des moteurs synchrones ; on sait en effet que le couple synchrone des machines synchrones s'annule en valeur moyenne dès que la vitesse n'est pas celle du synchronisme : voir par exemple la figure 6.3, en imaginant que δ devienne fonction linéaire croissante (resp. décroissante), du temps, ce qui correspond à un fonctionnement hypersynchrone (resp. hyposynchrone). Il est cependant possible de démarrer un moteur synchrone triphasé en l'alimentant à partir de la tension du réseau, en utilisant le couple asynchrone développé grâce aux enroulements rotoriques en court-circuit : inducteur et amortisseurs.

Nous allons donc établir l'expression du couple électromagnétique d'une machine synchrone connectée à un réseau de pulsation ω et tournant à une vitesse angulaire ω_r (ω_r/p_1 en multipolaire) en supposant $\omega_r \neq \omega$.

Nous supposons en outre que la vitesse varie suffisamment lentement pour qu'on puisse la considérer, à chaque instant, comme stationnaire, et que l'inducteur est fermé en court-circuit sur lui-même ($v_f = 0$).

1.2 Expression des tensions et équations électriques

Les tensions appliquées aux trois phases forment un système triphasé équilibré, soit en valeurs réduites :

$$(8.1)\qquad \begin{cases} v_a = v\cos(\omega t + \lambda) \\ v_b = v\cos\left(\omega t + \lambda - \dfrac{2\pi}{3}\right) \\ v_c = v\cos\left(\omega t + \lambda - \dfrac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

et, la vitesse électrique étant ω_r, l'angle θ s'écrit :

$$(8.2)\qquad \theta = \omega_r t + \theta_0 .$$

En reportant dans la transformation de PARK (5.19) il vient, en introduisant le glissement g

$$(8.3)\qquad g = \frac{\omega - \omega_r}{\omega}$$

$$(8.4)\qquad \begin{cases} v_d = v\cos(g\omega t + \lambda - \theta_0) \\ v_q = -v\sin(g\omega t + \lambda - \theta_0) = v\cos\left(g\omega t + \lambda - \theta_0 + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ v_o = 0 \end{cases}$$

ces valeurs sont à reporter dans le système (6.26) à (6.28), linéaire puisque :

— on considère ω_r constant

— les ψ et i sont en outre reliés par des équations différentielles linéaires.

La solution de régime établi est donc sinusoïdale et de pulsation $g\omega$ pour les grandeurs v_d, v_q, ψ_d, ψ_q, i_d, i_q. Il est intéressant de s'arrêter un instant sur la signification physique de cette propriété : la transformation de PARK a été interprétée comme la substitution aux enroulements de phases a, b, c d'enroulements d et q dont les axes magnétiques sont liés au rotor (voir fig. 5.6). En régime permanent, les grandeurs électriques associées suivent donc le même type de loi qu'au rotor : constantes au synchronisme ($g = 0$), de pulsation ω à l'arrêt ($g = 1$), et de pulsation $g\omega$ aux vitesses intermédiaires.

On peut donc résoudre (6.26) et (6.27) par la méthode des nombres complexes, sachant que les relations (8.4) peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} v_d = \mathcal{R}\mathrm{e}\left\{ v\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(g\omega t + \lambda - \theta_0)} \right\} \\ v_q = \mathcal{R}\mathrm{e}\left\{ v\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(g\omega t + \lambda - \theta_0 + \pi/2)} \right\} \end{cases}$$

on pose classiquement :

$$(8.5)\qquad \begin{aligned} \mathbf{v}_d &= v\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\lambda - \theta_0)} = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_q &= \mathrm{j}v\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\lambda - \theta_0)} = \mathrm{j}\mathbf{v} \end{aligned}$$

associés à l'opérateur $e^{jg\omega t}$, ce qui conduit à remplacer d/dt par $jg\omega$. Il vient donc, introduisant les nombres complexes $\boldsymbol{\psi}_d$, $\boldsymbol{\psi}_q$, $\mathbf{i}_d$, $\mathbf{i}_q$ définis de manière analogue :

$$(8.6) \qquad \begin{cases} \mathbf{v}_d = \mathbf{v} = -jg\omega\boldsymbol{\psi}_d - \boldsymbol{\psi}_q\,\omega(1-g) - r_a\,\mathbf{i}_d \\ \mathbf{v}_q = j\mathbf{v} = -jg\omega\boldsymbol{\psi}_q + \boldsymbol{\psi}_d\,\omega(1-g) - r_a\,\mathbf{i}_q\,. \end{cases}$$

Remarque : Pour exprimer en unités physiques les nombres complexes associés aux tensions, courants et flux tout au long de ce chapitre, on pourra transposer directement en nombres complexes les relations du type (6.2), (6.5), (6.10). A titre d'exemple la première équation (8.7) s'écrira :

$$\boldsymbol{\Psi}_d = \frac{j\mathbf{V}\sqrt{2}}{\omega} = \frac{\mathbf{v}_q}{\omega}$$

et la première équation (8.16) s'écrira :

$$\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_c = \mathbf{V}\sqrt{2}\,.$$

Ce choix revient à adopter la valeur crête comme module pour les grandeurs d'axes (d et q) et de phases (a, b, c).

1.3 Relations entre flux et courants ; solution en négligeant r_a

Si on néglige la résistance r_a, le système (8.6) se résout directement et il vient :

$$(8.7) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\psi}_d = \dfrac{j\mathbf{v}}{\omega} = \dfrac{\mathbf{v}_q}{\omega} \\ \boldsymbol{\psi}_q = \dfrac{-\mathbf{v}}{\omega} = \dfrac{-\mathbf{v}_d}{\omega}\,. \end{cases}$$

D'autre part, les relations (7.6) et (7.7) entre flux et courants, exprimées sous forme opérationnelle, se transforment aisément en formulation harmonique en remplaçant p par $jg\omega$ et tenant compte de ce que $v_f = 0$:

$$(8.8) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\psi}_d = \mathbf{l}_d(jg\omega)\,\mathbf{i}_d \\ \boldsymbol{\psi}_q = \mathbf{l}_q(jg\omega)\,\mathbf{i}_q\,. \end{cases}$$

1.4 Couple électromagnétique en régime asynchrone permanent

L'expression (6.9) du couple, non linéaire, doit être calculée à partir des lois temporelles :

$$(6.9) \qquad c_e = \omega[\psi_d(t)\,i_q(t) - \psi_q(t)\,i_d(t)]\,.$$

Mais étant données deux fonctions sinusoïdales de même pulsation

$$a(t) = a\cos(g\omega t + \alpha)$$

$$b(t) = b\cos(g\omega t + \beta)$$

auxquelles sont associées les nombres complexes :

$$\mathbf{a} = a\,e^{j\alpha} \qquad \mathbf{b} = b\,e^{j\beta}$$

on peut écrire :

$$a(t)\,b(t) = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\,\{\,\mathbf{ba}^*\,\} + \frac{1}{2}\mathcal{R}e\,\{\,\mathbf{ba}\,e^{2jg\omega t}\,\}\,.$$

Donc ici (6.9) s'écrit :

$$c_e = \frac{\omega}{2}\mathcal{R}e\,\{\,\mathbf{i}_q\,\boldsymbol{\psi}_d^* - \mathbf{i}_d\,\boldsymbol{\psi}_q^*\,\} + \frac{\omega}{2}\mathcal{R}e\,\{(\mathbf{i}_q\,\boldsymbol{\psi}_d - \mathbf{i}_d\,\boldsymbol{\psi}_q)\,e^{2jg\omega t}\,\}$$

soit, en utilisant (8.7) et (8.8) :

$$(8.9)\quad \left\{ \begin{aligned} c_e = &-\frac{v^2}{2}\mathcal{R}e\left\{\frac{1}{j\omega\mathbf{l}_d(jg\omega)} + \frac{1}{j\omega\mathbf{l}_q(jg\omega)}\right\} - \\ &-\frac{v^2}{2}\mathcal{R}e\left\{\left[\frac{1}{j\omega\mathbf{l}_d(jg\omega)} - \frac{1}{j\omega\mathbf{l}_q(jg\omega)}\right]e^{2jg\omega t}\right\}. \end{aligned} \right.$$

La première accolade correspond au couple asynchrone moyen. Il est facile d'expliciter son expression en transformant en admittances harmoniques les admittances opérationnelles (7.14) et (7.15) :

$$(8.10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\omega\mathbf{l}_d(jg\omega)} = \mathbf{y}_d(jg\omega) = \frac{1}{x_d} + \left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d}\right)\frac{jg\omega T'_d}{1 + jg\omega T'_d} + \left(\frac{1}{x''_d} - \frac{x}{x'_d}\right)\times\cdot \\ &\qquad\qquad \cdot\times\frac{jg\omega T''_d}{1 + jg\omega T''_d} \\ &\frac{1}{\omega\mathbf{l}_q(jg\omega)} = \mathbf{y}_q(jg\omega) = \frac{1}{x_q} + \left(\frac{1}{x''_q} - \frac{1}{x_q}\right)\frac{jg\omega T''_q}{1 + jg\omega T''_q} \end{aligned} \right.$$

d'où :

$$(8.11)\quad \left\{ \begin{aligned} c_{e\,\mathrm{moy}} = -\frac{v^2}{2}\Bigg[&\left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d}\right)\frac{g\omega T'_d}{1+g^2\omega^2 T'^2_d} + \left(\frac{1}{x''_d} - \frac{1}{x'_d}\right)\frac{g\omega T''_d}{1+g^2\omega^2 T''^2_d} + \\ &+\left(\frac{1}{x''_q} - \frac{1}{x_q}\right)\frac{g\omega T''_q}{1+g^2\omega^2 T''^2_q}\Bigg] \end{aligned} \right.$$

(le signe − est lié à la convention générateur).

Cette expression est de même nature que celle obtenue pour les moteurs asynchrones ; le couple apparaît comme la demi-somme des contributions de l'axe direct — qui se comporte comme un moteur asynchrone à double cage, du fait de la présence de l'inducteur et de l'amortisseur — et de l'axe en quadrature — qui se comporte comme un moteur asynchrone à simple cage.

La dernière accolade de (8.9) fait apparaître un couple pulsatoire, de pulsation $2g\omega$, dû à l'anisotropie du rotor ($\mathbf{l}_d(jg\omega) \neq \mathbf{l}_q(jg\omega)$). En explicitant ce couple par le même procédé que pour le couple moyen, on verrait que cette dissymétrie est surtout due à la présence de l'inducteur dans l'axe direct, et comme T'_d est assez grand, ce couple pulsatoire a une amplitude particulièrement élevée pour les faibles valeurs de g.

Remarques

1) *Influence de la résistance r_a*

Nous avons négligé r_a en vue de simplifier les calculs, et effectivement on commet ainsi une erreur faible pour l'obtention d'une grande partie de la courbe $c_{e\,\mathrm{moy}} = f(g)$. Mais il faudrait bien se garder de négliger r_a pour calculer correctement l'ensemble du démarrage d'un moteur synchrone.

Observons tout d'abord que le déterminant de (8.6) avec r_a négligé comporte $(1 - 2g)$ en facteur. Cela signifie que r_a, même faible, doit être pris en compte au voisinage de $g = 1/2$, c'est-à-dire du demi-synchronisme.

Le calcul du couple est alors un peu plus compliqué, le résultat est le suivant, en suivant la même méthode et en adoptant les mêmes notations et conventions de signes que ci-dessus :

$$c_e = \frac{v^2}{2\,|\,\mathbf{D}\,|^2}\,\mathcal{R}e\left\{ j(\mathbf{y}_d + \mathbf{y}_q) + \frac{r_a}{1-2g}(|\,\mathbf{y}_d\,|^2 + |\,\mathbf{y}_q\,|^2 - 2\,\mathbf{y}_d\,\mathbf{y}_q) + \right.$$
$$\left. + j\frac{r_a^2}{(1-2g)^2}(\mathbf{y}_d\,|\,\mathbf{y}_q\,|^2 + \mathbf{y}_q\,|\,\mathbf{y}_d\,|^2) \right\}$$

avec

$$\mathbf{D} = 1 + jg\frac{r_a}{1-2g}(\mathbf{y}_d + \mathbf{y}_q) + \frac{r_a^2}{1-2g}\,\mathbf{y}_d\,\mathbf{y}_q\,.$$

La présence de r_a introduit, au voisinage du demi-synchronisme ($g = 1/2$), une perturbation dans la courbe de couple qui peut être notable et qui est due essentiellement à la dissymétrie des deux axes ; cette perturbation est connue sous le nom de « phénomène de GÖRGES ». En voici l'explication physique.

Supposons, pour accentuer la dissymétrie, que l'induit du moteur synchrone soit triphasé équilibré, mais que l'inducteur ne comporte que des enroulements d'axe direct. L'inducteur tournant à la vitesse $\omega(1 - g)$, le champ d'induit, tournant à la vitesse ω, induit dans l'inducteur des courants de pulsation $g\omega$. L'inducteur engendre donc le long de son axe magnétique un champ unidirectionnel, d'amplitude variant sinusoïdalement à la pulsation $g\omega$, et tournant avec lui.

Par rapport à l'inducteur, ce champ unidirectionnel peut être décomposé (théorème de LEBLANC) en deux champs tournant en sens inverses aux vitesses $+ g\omega$ et $- g\omega$; les vitesses de ces champs par rapport à l'induit sont alors, en ajoutant la vitesse relative inducteur/induit :

$$(1 - g)\,\omega + g\omega = \omega$$
$$(1 - g)\,\omega - g\omega = \omega(1 - 2g)\,.$$

La première composante du champ inducteur, tournant à la même vitesse que le champ tournant de l'induit, produit le couple asynchrone habituel.

La deuxième composante, tournant à la vitesse $(1 - 2g)\omega$ par rapport à l'induit, développe dans ce dernier un couple asynchrone qui fait intervenir en particulier la résistance r_a de l'induit, qui se comporte comme le secondaire d'un moteur d'induction, en court-circuit relativement à la pulsation $(1 - 2g)\omega$ puisque la tension d'alimentation de l'induit est à la pulsation $\omega \neq (1 - 2g)\omega$ (sauf bien sûr pour $g = 0$).

Ce couple passe par zéro en changeant de signe pour la valeur $(1 - 2g)\omega = 0$, soit $g = 1/2$, entraînant dans ce voisinage un écart par rapport à la loi (8.11).

A titre d'illustration de ce qui précède est reproduite figure 8.1 l'allure de la variation du couple asynchrone moyen d'une machine synchrone en fonction du glissement. La courbe 1 représente la contribution de l'axe direct (voir formule (8.11)) en négligeant r_a, la courbe 2 représente la contribution de l'axe en quadrature en négligeant r_a, la courbe 3 (somme de 1 et 2) représente le couple moyen total, et la courbe 4 représente le couple moyen total lorsqu'on tient compte de r_a.

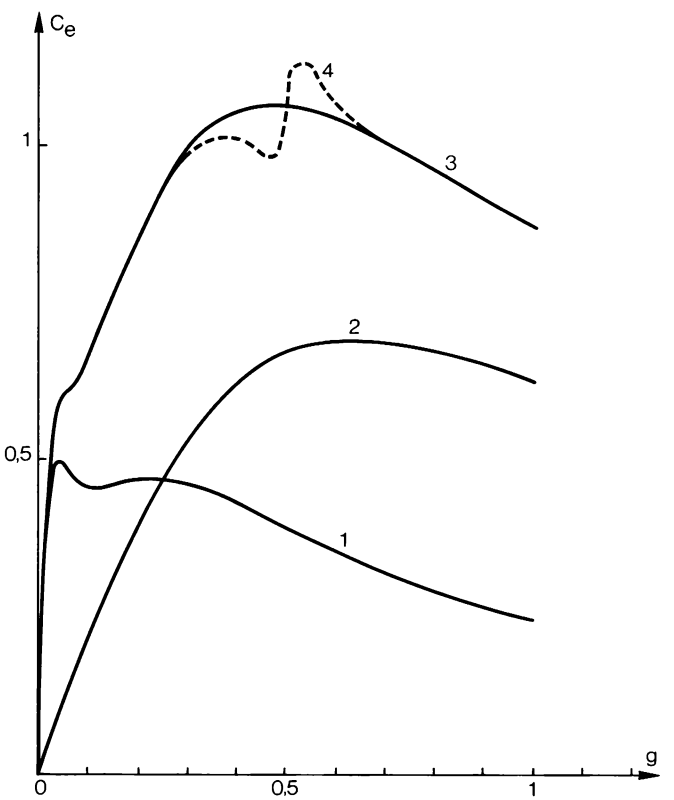


Fig. 8.1. — Exemple de caractéristique asynchrone d'une machine synchrone : 1. Contribution de l'axe direct. 2. Contribution de l'axe en quadrature. 3. Couple asynchrone résultant, en négligeant la résistance d'induit. 4. Couple asynchrone résultant, en tenant compte de la résistance d'induit.

2) *Influence de la rapidité du démarrage*

Nous avons établi l'expression du couple en supposant qu'à chaque instant la vitesse est stabilisée. En fait, si le démarrage est rapide, il n'en est pas ainsi, mais ce n'est généralement pas le cas des moteurs synchrones, dont le couple asynchrone est faible et donc le démarrage lent. Il n'en est pas de même dans le cas des moteurs asynchrones et quelques indications seront données à ce sujet au chapitre XII.

3) *Résistance en série avec l'inducteur*

Dans le cas d'un moteur synchrone démarrant en asynchrone, il se trouve que la contribution de l'enroulement inducteur au couple est très faible aux grands glissements donc aux basses vitesses du fait de la grande valeur de T'_d. On augmente cette contribution en insérant, en série avec r_f, une résistance que l'on peut d'ailleurs faire varier au cours du démarrage.

Sous l'effet du couple asynchrone, le régime finit par se stabiliser à un glissement faible, et le passage au régime synchrone s'obtient en connectant la source de tension continue v_f aux bornes de l'inducteur, la résistance additionnelle étant éliminée.

1.5 Courant dans les phases du stator

En régime asynchrone, les courants d'axes sont donnés par (8.8), avec les flux d'axes donnés par (8.7) lorsqu'on néglige la résistance du stator.

On en déduit

$$\mathbf{i}_d = \frac{\mathbf{v}_q}{\omega \mathbf{l}_d(jg\omega)} \qquad \mathbf{i}_q = \frac{-\mathbf{v}_d}{\omega \mathbf{l}_q(jg\omega)}. \tag{8.12}$$

Pour passer aux expressions temporelles, il faut expliciter le module et l'argument de $\mathbf{l}_d$ et $\mathbf{l}_q$ soit, sous la forme d'impédances complexes :

$$\begin{aligned} j\omega \mathbf{l}_d(jg\omega) &= z_d\, e^{j\zeta_d} \quad (z_d \text{ et } \zeta_d \text{ fonctions de } g) \\ j\omega \mathbf{l}_q(jg\omega) &= z_q\, e^{j\zeta_q} \quad (z_q \text{ et } \zeta_q \text{ fonctions de } g). \end{aligned} \tag{8.13}$$

Alors, en utilisant (8.4) :

$$\begin{cases} i_d(t) = \dfrac{-v}{z_d} \cos(g\omega t + \lambda - \theta_0 - \zeta_d) \\ i_q(t) = \dfrac{v}{z_q} \sin(g\omega t + \lambda - \theta_0 - \zeta_q) \end{cases} \tag{8.14}$$

d'où l'expression de $i_a(t)$, en utilisant (5.23) avec $\theta = (1 - g)\,\omega t + \theta_0$:

$$\begin{cases} i_a(t) = \dfrac{v}{2 z_d} \{ -\cos(\omega t + \lambda - \zeta_d) - \cos[(1-2g)\,\omega t - 2\,\theta_0 - \lambda + \zeta_d] \} + \\ \qquad + \dfrac{v}{2 z_q} \{ -\cos(\omega t + \lambda - \zeta_q) + \cos[(1-2g)\,\omega t + 2\,\theta_0 - \lambda + \zeta_q] \}. \end{cases} \tag{8.15}$$

Cette expression montre que le courant dans les phases du stator, en régime asynchrone et alimentation par une tension sinusoïdale triphasée, n'est pas sinusoïdal mais comporte une composante à la pulsation $(1 - 2g)\omega$ liée à la différence des impédances d'axes direct et quadrature.

2 CARACTÉRISTIQUES FRÉQUENCIELLES; SCHÉMAS ÉQUIVALENTS EN RÉGIME HARMONIQUE ET ASYNCHRONE

On constate que le comportement d'une machine synchrone en régime asynchrone est caractérisé par les deux « admittances harmoniques » $\mathbf{y}_d(jg\omega)$ et $\mathbf{y}_q(jg\omega)$ explicitées en (8.10).

Il est commode de traduire ces expressions par des graphiques dans le plan complexe. Un exemple en est donné figure 8.2*a* et 8.2*b*. L'intérêt de ces courbes est double : d'une part elles caractérisent le fonctionnement de la machine lors d'un

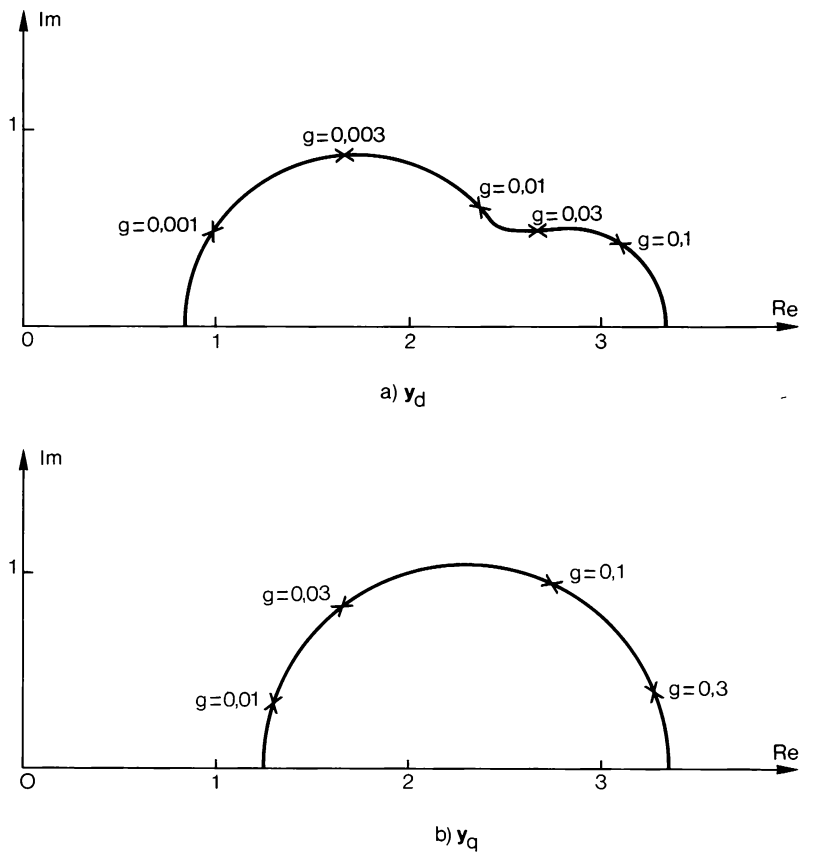


Fig. 8.2. — Caractéristiques fréquentielles d'une machine synchrone :
a) admittance d'axe direct ;
b) admittance d'axe en quadrature.

certain nombre d'autres régimes, notamment ceux où les grandeurs d'axes (i_d, i_q, v_d ... etc.) subissent une variation sinusoïdale pure ou superposée à une valeur constante (exemple : petites oscillations autour d'un régime permanent synchrone, (voir chapitre X, § 4). La pulsation Ω de cette variation pourra aussi bien être appelée $g\omega$, g étant ici non plus le « glissement » du régime asynchrone, mais la « pulsation relative » Ω/ω.

On notera que ces courbes correspondent tout à fait au diagramme d'admittance des moteurs asynchrones. Elles en diffèrent par le fait qu'une seule machine possède deux admittances $\mathbf{y}_d$ et $\mathbf{y}_q$, dont l'interaction est prise en compte au niveau des équations de PARK, par exemple (8.6) dans le cas du fonctionnement asynchrone.

Lorsqu'on connaît les différentes réactances et résistances de la machine synchrone, une autre représentation des admittances harmoniques consiste à appliquer la notion de schéma équivalent au régime sinusoïdal.

L'obtention de ces schémas est immédiate à partir de ceux des figures 7.8 et 7.9 : il suffit de considérer les flux, courants, tensions comme des nombres complexes, et de remplacer p par $jg\omega$. Il est commode ensuite de remplacer les grandeurs d'entrée $jg\omega\psi_d$ et $jg\omega\psi_q$ où figure la variable g, par $j\omega\psi_d$ et $j\omega\psi_q$, ce qui entraîne une division par g des autres paramètres (procédé classique dans l'étude des moteurs asynchrones), d'où les schémas des figures 8.3*a* et 8.3*b*.

Ces schémas peuvent être considérés comme une image des relations (8.8), mais de même que pour les figures 8.2, leur utilité n'est pas limitée au cas du fonctionnement asynchrone. Notamment le schéma fig. 8.3*a*) permet de considérer $v_f \neq 0$ (mais variant à la pulsation $g\omega$), et d'expliciter la fonction $\mathbf{g}(jg\omega)$

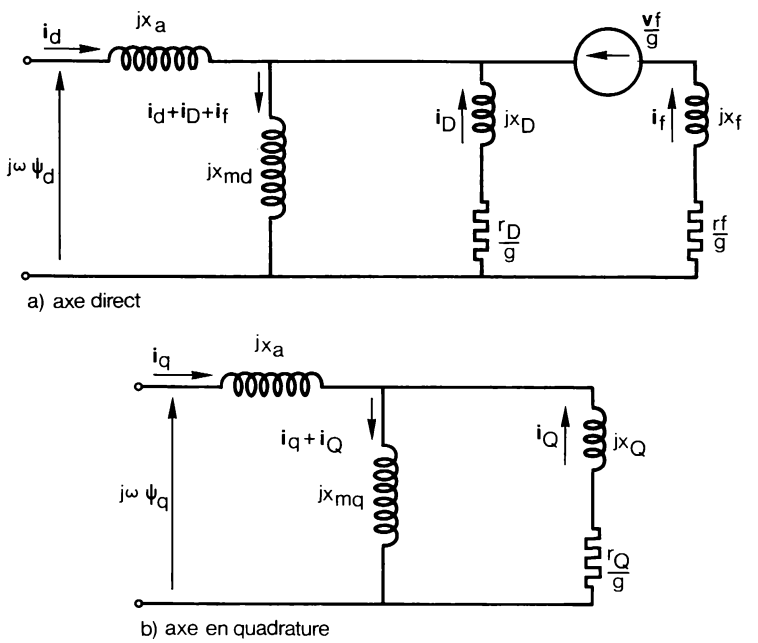


Fig. 8.3. — Schémas équivalents en régime harmonique et asynchrone.

qui relie ψ_d à $\mathbf{v}_f$ lorsque $i_d = 0$. On pourrait tracer la caractéristique fréquencielle de cette dernière fonction, utilisée surtout dans les problèmes de réglage de tension.

Notons enfin que tout ce qui vient d'être dit s'applique aussi bien au schéma équivalent à fuites communes de la figure 7.10.

3 MESURE DES ADMITTANCES HARMONIQUES A L'ARRÊT

Considérons une machine synchrone à l'arrêt (fig. 8.4) dont l'inducteur est fermé sur un ampèremètre à courant alternatif A_2 d'impédance négligeable. (On peut donc considérer que $v_f = 0$.)

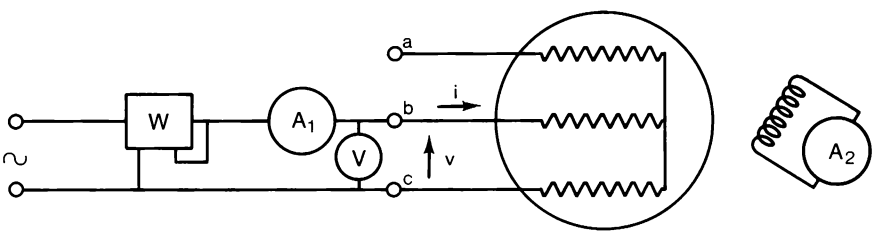


Fig. 8.4. — Mesure des impédances d'axe direct et en quadrature à l'arrêt.

Entre les bornes *b* et *c* de l'induit est appliquée une tension sinusoïdale de pulsation $g\omega$, la phase *a* étant à circuit ouvert. On doit mesurer au primaire la tension, le courant, la puissance active ; d'où l'indication figure 8.4, à titre d'exemple, d'un voltmètre V, d'un ampèremètre A_1, d'un wattmètre W.

L'angle $\theta(Oa, Od)$ étant constant et égal à θ_0, toutes les grandeurs figurant dans la transformation de PARK (5.18) à (5.20) et (5.23) à (5.25) sont sinusoïdales et de pulsation $g\omega$, et peuvent donc être représentées par des nombres complexes en valeurs réduites.

La tension $\mathbf{v}$ et le courant $\mathbf{i}$ sont orientés conventionnellement comme sur la figure 8.4, les autres grandeurs conservant leurs conventions de signes (chapitre V, § 1.3).

Les connexions de l'induit entraînent les relations :

$$(8.16) \qquad \begin{cases} \mathbf{v}_b - \mathbf{v}_c = \mathbf{v} \,. \\ \mathbf{v}_a = 0 \\ \mathbf{i}_b = -\mathbf{i}_c = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i}_a = 0 \,. \end{cases}$$

En reportant dans la transformation de PARK, il en résulte :

$$(8.17)\qquad \begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}_d\sqrt{3}\sin\theta_0 - \mathbf{v}_q\sqrt{3}\cos\theta_0 \\ \mathbf{i}_d = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathbf{i}\sin\theta_0 \\ \mathbf{i}_q = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathbf{i}\cos\theta_0\,. \end{cases}$$

D'autre part les équations de PARK (6.26) et (6.27) s'écrivent ici en nombres complexes, et du fait que $\omega_r = 0$

$$(8.18)\qquad \begin{cases} \mathbf{v}_d = -\,jg\omega\boldsymbol{\psi}_d - r_a\,\mathbf{i}_d \\ \mathbf{v}_q = -\,jg\omega\boldsymbol{\psi}_q - r_a\,\mathbf{i}_q\,. \end{cases}$$

En exprimant $\boldsymbol{\psi}_d$ et $\boldsymbol{\psi}_q$ à l'aide de (8.8), il vient en définitive :

$$(8.19)\qquad \mathbf{v} = 2\,\mathbf{i}[\{\,r_a + jg\omega\mathbf{l}_d(jg\omega)\,\}\sin^2\theta_0 + \{\,r_a + jg\omega\mathbf{l}_q(jg\omega)\,\}\cos^2\theta_0]\,.$$

Les appareils de mesure permettent de connaître $\mathbf{v}/2\,\mathbf{i}$ en module et argument ; ce quotient est égal à

$$r_a + jg\omega\mathbf{l}_d(jg\omega) \quad \text{lorsque} \quad \theta_0 = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$r_a + jg\omega\mathbf{l}_q(jg\omega) \quad \text{lorsque} \quad \theta_0 = 0 \text{ ou } \pi\,.$$

Ces deux situations s'obtiennent en faisant tourner lentement le rotor jusqu'à obtenir :

— soit un maximum du courant dans A_2 : le champ est alors purement d'axe d, ce qui d'après (8.17) correspond à $\cos\theta_0 = 0$, $\theta_0 = \pm\,\pi/2$, l'impédance mesurée est donc celle d'axe direct

— soit l'annulation du courant dans A_2 ; le champ est alors purement d'axe q, ce qui d'après (8.17) correspond à $\sin\theta_0 = 0$, $\theta_0 = 0$ ou π, l'impédance mesurée est donc celle d'axe en quadrature.

Remarques

1) Pour accéder à $\mathbf{y}_d(jg\omega)$ et $\mathbf{y}_q(jg\omega)$ définis par (8.10), il faut, des mesures ci-dessus, retrancher r_a, puis diviser le résultat par jg : la précision diminue au fur et à mesure que g (ou encore la pulsation de mesure $\Omega' = g\omega$) devient plus faible.

Par ailleurs, lorsque g augmente, il résulte de (8.10) que la partie réelle de $\mathbf{y}_d(jg\omega)$ tend vers $1/x''_d$ et la partie réelle de $\mathbf{y}_q(jg\omega)$ tend vers $1/x''_q$.

En particulier la mesure faite avec $g = 1(\Omega' = \omega)$ fournit une bonne première approximation (en principe par excès) des réactances subtransitoires x''_d et x''_q.

2) Le schéma de mesure de la figure 8.4 est appelé « schéma série ». On peut aussi adopter le schéma dit « schéma parallèle » dans lequel les deux bornes b et c sont réunies, et la tension $\mathbf{v}$ est appliquée entre le point ainsi formé

et la borne *a*, la phase *a* étant donc parcourue par le courant **i**. La mise en équations s'effectue de façon analogue, et la seule différence quant au résultat consiste en ce que le coefficient 2 de la formule (8.19) doit être changé en 3/2.

Lorsqu'on fait tourner lentement le rotor, la position pour laquelle le courant inducteur est maximal correspond, ici encore, à l'impédance d'axe direct, et celle pour laquelle le courant inducteur s'annule correspond à l'impédance d'axe en quadrature.

3) Le calcul théorique ci-dessus implique les hypothèses de la théorie des deux axes, notamment le fait de négliger les harmoniques d'espace de la f.m.m. Ces hypothèses ne constituant qu'une première approximation, il convient donc de considérer que les admittances harmoniques obtenues par cette méthode ne sont qu'approchées. En particulier on ne trouve pas exactement les mêmes valeurs selon qu'on fait la mesure avec le schéma série ou le schéma parallèle.

CHAPITRE IX

RÉGIMES DÉSÉQUILIBRÉS DES MACHINES SYNCHRONES

Le fonctionnement déséquilibré d'une machine synchrone peut être considéré :

— en régime permanent, du fait d'un déséquilibre des tensions ou des courants appliqués au stator :

— en régime transitoire, du fait de perturbations brusques intéressant les trois phases de façon déséquilibrée (court-circuit entre phases, entre phase et neutre, etc.).

Le point neutre de l'enroulement stator des machines synchrones n'est en général pas relié directement à la terre, mais il est soit isolé soit relié par une grande impédance ; de ce fait ce sont les calculs où seules interviennent la composante directe et la composante inverse des tensions et des courants qui présentent le plus grand intérêt pratique et nous nous limiterons à ce cas.

1 INFLUENCE D'UNE COMPOSANTE INVERSE DE TENSION OU DE COURANT

Par suite de l'indépendance linéaire des régimes direct et inverse, on peut considérer de façon indépendante les conséquences de l'existence, dans le système de tensions ou de courants appliqués à la machine synchrone, d'une composante à succession de phases inverse.

Cette étude nous permettra de déterminer si l'on peut, en régime permanent, définir une impédance inverse pour la machine synchrone, et quelle est sa valeur.

1.1 Application d'une composante inverse de tension

Si c'est la tension qui comporte une composante inverse triphasée purement sinusoïdale, le comportement de la machine vis-à-vis de cette composante est identique à ce qu'il serait lors d'un régime asynchrone avec $g = 2$, et on pourra constater le parallélisme des calculs qui vont suivre, avec ceux du chapitre VIII, paragraphe 1.2.

Un système inverse de tension a pour expression en valeurs réduites :

$$(9.1)\qquad \begin{cases} v_a = v_2 \cos(\omega t + \lambda) \\ v_b = v_2 \cos\left(\omega t + \lambda + \dfrac{2\pi}{3}\right) \\ v_c = v_2 \cos\left(\omega t + \lambda + \dfrac{4\pi}{3}\right). \end{cases}$$

Ces expressions doivent être reportées dans la transformation de PARK (5.19) avec $\theta = \omega t + \theta_0$ d'où :

$$(9.2)\qquad \begin{cases} v_d = v_2 \cos(2\omega t + \lambda + \theta_0) \\ v_q = v_2 \sin(2\omega t + \lambda + \theta_0). \end{cases}$$

Les tensions v_d et v_q sont sinusoïdales et de pulsation 2ω ; il en sera de même pour ψ_d, ψ_q, i_d, i_q et il vient, en introduisant les nombres complexes :

$$(9.3)\qquad \begin{cases} \mathbf{v}_d = v_2 \, e^{j(\lambda+\theta_0)} = \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_q = v_2 \, e^{j(\lambda+\theta_0-\pi/2)} = -j\mathbf{v}_d = -j\mathbf{v}_2 \end{cases}$$

associés à l'opérateur $e^{2j\omega t}$, et en négligeant la résistance r_a :

$$(9.4)\qquad \begin{cases} \mathbf{v}_d = -2j\omega\boldsymbol{\psi}_d - \omega\boldsymbol{\psi}_q = \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_q = -2j\omega\boldsymbol{\psi}_q + \omega\boldsymbol{\psi}_d = -j\mathbf{v}_2 \end{cases}$$

d'où on tire :

$$(9.5)\qquad \boldsymbol{\psi}_d = -\frac{\mathbf{v}_q}{\omega} \qquad \boldsymbol{\psi}_q = \frac{\mathbf{v}_d}{\omega}$$

d'autre part les relations (8.8) s'appliquent au régime inverse et les quantités $\mathbf{l}_d\,\omega(jg\omega)$ et $\mathbf{l}_q\,\omega(jg\omega)$, lorsque $g = 2$, sont assez voisines des nombres réels égaux aux réactances subtransitoires x''_d et x''_q, soit en adoptant cette approximation :

$$(9.6)\qquad \begin{cases} \omega\boldsymbol{\psi}_d = x''_d \, \mathbf{i}_d \\ \omega\boldsymbol{\psi}_q = x''_q \, \mathbf{i}_q. \end{cases}$$

On en déduit facilement les lois de variation au cours du temps :

$$(9.7)\qquad \begin{cases} i_d(t) = -\dfrac{v_2}{x''_d} \sin(2\omega t + \lambda + \theta_0) \\ i_q(t) = \dfrac{v_2}{x''_q} \cos(2\omega t + \lambda + \theta_0) \end{cases}$$

d'où le courant $i_a(t)$, en utilisant (5.23) avec $\theta = \omega t + \theta_0$

$$(9.8)\qquad \begin{cases} i_a(t) = -\dfrac{v_2}{2}\left(\dfrac{1}{x''_d} + \dfrac{1}{x''_q}\right) \sin(\omega t + \lambda) - \cdots \\ \qquad\qquad \cdots - \dfrac{v_2}{2}\left(\dfrac{1}{x''_d} - \dfrac{1}{x''_q}\right) \sin(3\omega t + \lambda + 2\theta_0). \end{cases}$$

On en déduit qu'une tension inverse sinusoïdale donne naissance à un courant inverse comportant un harmonique 3, et que la réactance inverse, quotient de la tension par le fondamental du courant, a pour valeur, dans ce cas, la moyenne harmonique de x''_d et x''_q

$$x_2 = \frac{2\, x''_d\, x''_q}{x''_d + x''_q}. \tag{9.9}$$

1.2 Application d'une composante inverse de courant

Si c'est le courant qui comporte une composante inverse triphasée purement sinusoïdale, soit en valeur relative

$$\begin{aligned} i_a &= i_2 \cos(\omega t + \lambda) \\ i_b &= i_2 \cos\left(\omega t + \lambda + \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_c &= i_2 \cos\left(\omega t + \lambda + \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \tag{9.10}$$

alors la transformation de PARK donne des expressions tout à fait similaires à (9.2) et (9.3) en y remplaçant simplement v par i ; d'autre part les expressions (9.4) à (9.6) restant valables, on obtient facilement les expressions de $v_d(t)$ et $v_q(t)$:

$$\begin{cases} v_d(t) = x''_q\, i_2 \sin(2\,\omega t + \lambda + \theta_0) \\ v_q(t) = -\, x''_d\, i_2 \cos(2\,\omega t + \lambda + \theta_0) \end{cases} \tag{9.11}$$

d'où en utilisant (5.24) avec $\theta = \omega t + \theta_0$:

$$\begin{cases} v_a(t) = \dfrac{i_2}{2}(x''_d + x''_q) \sin(\omega t + \lambda) + \cdots \\ \cdots + \dfrac{i_2}{2}(x''_q - x''_d) \sin(3\,\omega t + \lambda - 2\,\theta_0). \end{cases} \tag{9.12}$$

On en déduit qu'un courant inverse sinusoïdal donne naissance à une tension inverse comportant un harmonique 3, et que la réactance inverse, quotient du fondamental de la tension par le courant, a pour valeur dans ce cas la moyenne arithmétique de x''_d et x''_q :

$$x_2 = \frac{x''_d + x''_q}{2}. \tag{9.13}$$

2 RÉGIMES TRANSITOIRES DÉSÉQUILIBRÉS

2.1 Généralités. Difficulté du problème

Les principaux régimes transitoires déséquilibrés auxquels on est amené à s'intéresser sont d'une part les courts-circuits dissymétriques survenant entre les

bornes de la machine synchrone ou en un point du réseau auquel elle est raccordée, d'autre part les phénomènes de commutation entre phases intervenant lorsque la machine synchrone est alimentée par l'intermédiaire d'un convertisseur statique ; l'étude de ce dernier cas se rapproche de l'étude du court-circuit entre phases, avec la différence qu'on doit s'intéresser à toute la gamme de fréquences comprises entre 0 et la fréquence nominale, et qu'aux fréquences très basses l'influence des résistances doit être prise en compte de façon rigoureuse.

Dans le présent chapitre nous nous limiterons cependant aux régimes transitoires survenant à vitesse nominale, donc dans des conditions telles que les résistances peuvent être prises en compte de façon approximative.

La principale difficulté rencontrée lors de l'étude des régimes transitoires déséquilibrés des machines synchrones provient de ce que la dissymétrie des conditions électriques imposées aux trois phases du stator fait disparaître les simplifications apportées par la transformation de PARK. Ces simplifications provenaient en effet de ce que le stator, étant de structure symétrique, pouvait être avantageusement ramené à deux axes perpendiculaires d'orientation quelconque, et que l'on avait donc avantage à choisir alignés avec les axes de symétrie du rotor.

Illustrons cette situation par l'exemple du court-circuit entre les deux phases b et c d'une machine synchrone initialement à vide.

Les équations (7.1), (7.2), (7.6) et (7.7), en valeurs réduites, peuvent toujours être appliquées aux variations des grandeurs suivant la perturbation, mais les conditions traduisant la perturbation doivent aussi être exprimées en termes de grandeurs d'axes.

La perturbation, exprimée en grandeurs de phases, consiste à imposer à l'instant initial :

$$\text{(9.14)} \qquad \begin{cases} v_b = v_c \\ i_b + i_c = 0 \\ i_a = 0 . \end{cases}$$

La transformation de PARK (5.18) à (5.25), appliquée à ces relations, donne :

$$\text{(9.15)} \qquad \begin{cases} v_d \sin\theta = v_q \cos\theta \\ i_d \cos\theta + i_q \sin\theta = 0 \\ i_o = 0 . \end{cases}$$

Or $\theta = \omega t + \theta_0$, et l'apparition de fonctions sinusoïdales du temps dans les équations différentielles rend leur résolution très compliquée.

Les conditions exprimant la perturbation sont simplifiées si on renonce aux axes tournants et si on exprime les tensions, courants et flux en composantes de CLARKE (5.48) et (5.49). Les relations (9.1) deviennent simplement :

$$\text{(9.16)} \qquad \begin{cases} v_\beta = 0 \\ i_\alpha = 0 . \\ i_o = 0 \end{cases}$$

Mais la complication est alors reportée au niveau des relations entre flux et courants, dans lesquelles les coefficients d'inductance propre et mutuelle restent

fonctions sinusoïdales de l'angle variable θ, puisque les axes supportant les enroulements fictifs α et β sont immobiles par rapport au stator.

Les mêmes conclusions s'appliquent aux autres cas typiques de perturbations déséquilibrées : court-circuit entre une phase et le neutre ou entre deux phases et le neutre.

La résolution complète de ces régimes fait alors apparaître, dans le cas général, en plus des termes apériodiques amortis et pseudo-périodiques amortis de pseudo-pulsation ω, des séries infinies de termes, pseudo-périodiques amortis, dont les pseudo-pulsations sont les multiples de la pulsation fondamentale ω.

Une deuxième difficulté se rencontre dans le cas où la perturbation déséquilibrée affecte une machine synchrone raccordée à un réseau : dans ce cas, en effet, on ne peut aboutir à une solution analytique rigoureuse.

On trouvera des exemples de calcul des trois types principaux de courts-circuits déséquilibrés à vide dans les références suivantes :

[1] Calcul direct à partir des grandeurs de phase, dans le cas du défaut entre deux phases.

[6] Id. dans les trois cas de défaut déséquilibré.

Dans ces deux références, les valeurs initiales des différentes composantes des courants de défaut sont déterminées par des méthodes approchées puis une estimation est faite des constantes de temps associées.

Dans [7] une méthode générale de résolution est proposée, basée sur la transformation de LAPLACE.

Le calcul du couple électromagnétique dans les trois cas de défaut est également développé dans [6], et on trouvera aussi dans [4], des expressions de ces couples.

Il est heureusement possible, en raisonnant sur la solution rigoureuse, d'en extraire une solution simple, suffisamment approchée pour permettre une estimation raisonnable des contraintes résultant de ces perturbations et une prise en compte des défauts dissymétriques dans les études de stabilité dynamique des réseaux. Nous allons le montrer en prenant pour exemple le cas du défaut entre deux phases.

2.2 Court-circuit brusque entre deux phases

2.2.1 *Solution rigoureuse à partir du régime à vide*

Les conditions (9.15) appliquées au système d'équations (7.1), (7.2), (7.6) et (7.7) conduisent à l'expression suivante du courant dans la phase b :

$$
(9.17)\quad \left\{
\begin{aligned}
i_b = {} & e\sqrt{3}\left[\frac{1}{x_d + x_2} + \left(\frac{1}{x'_d + x_2} - \frac{1}{x_d + x_2}\right) e^{-t/T'_{d(l-l)}} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{x''_d + x_2} - \frac{1}{x'_d + x_2}\right) e^{-t/T''_{d(l-l)}}\right] \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k \sin(2k+1)(\omega t + \theta_0) \\
& + \frac{e\sqrt{3}\sin\theta_0}{x_2} e^{-t/T_{a(l-l)}}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-b)^k \cos 2k(\omega t + \theta_0)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Avec :

$$(9.18)\qquad \begin{cases} x_2 = \sqrt{x''_d\, x''_q} \\ b = \dfrac{\sqrt{x''_q} - \sqrt{x''_d}}{\sqrt{x''_q} + \sqrt{x''_d}} \\ \mathrm{T}'_{d(l-l)} = \dfrac{x'_d + x_2}{x_d + x_2}\,\mathrm{T}'_{do} \\ \mathrm{T}''_{d(l-l)} = \dfrac{x''_d + x_2}{x'_d + x_2}\,\mathrm{T}''_{do} \\ \mathrm{T}_{a(l-l)} = \dfrac{x_2}{\omega r_a}\,. \end{cases}$$

Les quantités non définies ici sont données au chapitre VII, paragraphe 7.

On constate que la solution se présente sous la forme d'une double série infinie de termes, et que les termes correspondant au rang $k = 0$ présentent de grandes analogies avec l'expression (7.40) du courant de court-circuit à vide ; la solution complète comporte en outre une somme d'harmoniques impairs associée au terme pseudo-périodique amorti et une somme d'harmoniques pairs associée au terme apériodique amorti, l'amplitude de ces harmoniques étant d'autant plus faible que x''_d et x''_q sont plus voisins.

2.2.2 *Considération sur le terme pseudo-périodique amorti ; conséquence pratique*

L'étude de la stabilité transitoire des réseaux, dont il sera question au chapitre X, consiste à évaluer l'influence de divers types de perturbations sur le maintien au synchronisme ou la perte de synchronisme des machines synchrones entre elles. Dans cette évaluation, c'est la partie de la solution des équations de PARK correspondant pour les grandeurs de phases au terme pseudo-périodique amorti associé à la pulsation fondamentale, qui joue le rôle prépondérant.

Dans cette catégorie d'études on est donc amené à chercher une bonne évaluation de ce terme.

Dans le cas du court-circuit entre deux phases à vide, ce terme a pour expression d'après (9.17) :

$$(9.19)\qquad \begin{cases} i_{b(\mathrm{fond.})} = e\sqrt{3}\left[\dfrac{1}{x_d + x_2} + \left(\dfrac{1}{x'_d + x_2} - \dfrac{1}{x_d + x_2}\right)\mathrm{e}^{-t/\mathrm{T}'_{d(l-l)}} + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \left(\dfrac{1}{x''_d + x_2} - \dfrac{1}{x'_d + x_2}\right)\mathrm{e}^{-t/\mathrm{T}''_{d(l-l)}}\right]\sin(\omega t + \theta_0)\,. \end{cases}$$

Comme dans le cas du court-circuit triphasé à vide, on constate que cette expression comporte un terme subtransitoire, associé à la constante de temps $\mathrm{T}''_{d(l-l)}$, un terme transitoire, associé à la constante de temps $\mathrm{T}'_{d(l-l)}$, et un terme synchrone.

On constate également que les amplitudes intervenant dans cette expression :

$$\frac{e\sqrt{3}}{x''_d + x_2}$$ pour l'amplitude initiale du régime subtransitoire

$$\frac{e\sqrt{3}}{x'_d + x_2}$$ pour l'amplitude initiale du régime transitoire

(c'est-à-dire l'amplitude, extrapolée à l'instant origine, en supposant le régime subtransitoire éteint).

$$\frac{e\sqrt{3}}{x_d + x_2}$$ pour l'amplitude du régime permanent final

correspondent à la solution qui serait fournie par la méthode des composantes symétriques en attribuant à la machine synchrone une réactance directe égale respectivement à x''_d, x'_d ou x_d.

C'est pourquoi, dans l'étude de la stabilité dynamique des réseaux, les régimes transitoires déséquilibrés où intervient une composante inverse peuvent être formulés, avec une approximation suffisante, en utilisant la méthode des composantes symétriques. Pour le régime inverse la machine synchrone est simplement représentée par sa réactance inverse x_2, et pour le régime direct on utilise les équations de PARK.

La méthode des composantes symétriques est également appliquée aux perturbations du réseau faisant intervenir le neutre, par exemple en cas de court-circuit phase-terre ou deux phases-terre ; les machines synchrones n'interviennent pas dans le schéma homopolaire pour la raison indiquée à la fin du paragraphe 2.1.

3 VALEUR DE LA RÉACTANCE INVERSE. INTÉRÊT PRATIQUE

Les exemples qui viennent d'être traités montrent que la valeur de la réactance inverse d'une machine synchrone dépend du type de régime inverse appliqué et des conditions de raccordement au réseau ; les deux valeurs extrêmes sont celles données par (9.9) et (9.13) (la valeur donnée par (9.18) est un exemple de valeur intermédiaire).

Pour les études de stabilité dynamique des réseaux, on sera donc amené à adopter une valeur moyenne, avec une marge d'erreur d'autant plus faible que les réactances x''_d et x''_q sont plus voisines ; la différence relative entre ces deux réactances est généralement inférieure à 10 % pour les alternateurs raccordés au réseau.

Pour une évaluation plus précise des contraintes en courant et en couple, on trouvera dans les références bibliographiques déjà cités dans ce chapitre des expressions analytiques détaillées, mais généralement limitées au cas du court-circuit à vide aux bornes de la machine synchrone ; pour évaluer ces contraintes dans le cas plus réaliste d'une perturbation survenant à partir d'un fonctionnement

sur réseau, on peut faire appel au modèle dynamique de réseau dans les conditions exposées au paragraphe 2.2.2, à condition de ne pas apporter aux équations du régime direct les simplifications proposées plus loin au chapitre X, simplifications justifiées cependant mais pour d'autres types de problèmes. Enfin, pour cette évaluation il conviendra ainsi de tenir compte de la résistance inverse r_2, dont l'évaluation théorique pourrait être faite très facilement en reprenant les calculs du paragraphe 1, mais en remplaçant simplement, dans les expressions approchées (9.6) x''_d par $\mathbf{l}_d\,\omega(2\,j\omega)$ et x''_q par $\mathbf{l}_q\,\omega(2\,j\omega)$.

Une autre application de la connaissance de la réactance inverse concerne l'étude des conséquences des déséquilibres permanents existant dans les réseaux et provenant soit de l'existence de charges monophasés, soit du déséquilibre de structure de certains éléments du réseau (lignes aériennes, transformateurs).

Ce déséquilibre permanent engendre dans les rotors des machines synchrones des courants de pulsation $2\,\omega$ qu'il est nécessaire de savoir évaluer en vue de dimensionner correctement les circuits destinés à véhiculer ces courants, notamment les circuits amortisseurs. La connaissance de la réactance inverse des machines synchrones est nécessaire pour cette évaluation.

CHAPITRE X

RÉGIMES TRANSITOIRES AU COURS DESQUELS LA VITESSE NE PEUT PAS ÊTRE CONSIDÉRÉE COMME CONSTANTE

1 INTRODUCTION

L'étude des régimes transitoires à vitesse non constante revêt, dans le cas des machines synchrones, une importance toute spéciale, du fait que c'est la seule machine tournante dont le fonctionnement normal exige une vitesse rigoureusement constante, et plus particulièrement lorsqu'elle est raccordée à un réseau de transport d'énergie. C'est principalement à ce cas que nous allons nous intéresser au cours de ce chapitre.

Lors de l'étude des régimes permanents (chapitre VI), nous avons établi l'expression (6.57) du couple électromagnétique montrant que lors de tels régimes le couple est une fonction périodique de l'angle interne δ qui caractérise la position, dans le plan complexe de la f.é.m. interne **e** (elle-même liée mécaniquement à la position angulaire du rotor), par rapport à la référence synchrone constituée par la tension aux bornes **v**. On voit bien qu'une condition nécessaire pour que cette expression ait une valeur moyenne non nulle est que l'angle δ ne varie pas selon une loi monotone et régulière au cours du temps.

On verra plus loin que dans l'équation du mouvement (6.41) la dérivée $\frac{d\omega_r}{dt}$ peut être remplacée par $\frac{d^2\delta}{dt^2}$. Associée à l'expression (6.57) du couple, cette propriété montre que le comportement mécanique d'une machine synchrone est tout à fait analogue à celui d'un pendule, la roue polaire ayant tendance sous l'effet d'une perturbation extérieure, à osciller à partir de la valeur angulaire correspondant au fonctionnement synchrone initial. Bien entendu en régime variable l'expression (6.57) du couple n'est plus valable, car les flux et courants intervenant dans (6.9) varient au cours du temps. Néanmoins, ainsi qu'on pourra le constater physiquement à l'aide du modèle simplifié développé au paragraphe 5, certaines des propriétés du couple résultant de l'expression (6.57) se conservent lors des grandes perturbations, notamment le fait que le couple est une fonction non linéaire de l'angle δ (et aussi de sa dérivée première par rapport au temps), si bien que le retour au régime synchrone après perturbation n'est pas toujours assuré et dépend de l'amplitude de variation de δ au cours de la perturbation.

L'un des problèmes majeurs dans l'étude des machines synchrones reliées à un réseau est de déterminer le degré de sévérité des perturbations en deçà duquel le retour au synchronisme est assuré.

Une première catégorie de problèmes à vitesse non constante est donc celui des *grandes perturbations*, et l'étude des conditions de retour au synchronisme après une grande perturbation constitue ce qu'on appelle l'étude de la « *stabilité transitoire* ».

Ainsi qu'on l'a indiqué plus haut, l'expression du couple lors de tels régimes dépend des lois de variations des flux et courants dont le calcul fait intervenir la résolution des équations de PARK.

Par ailleurs, l'expression (6.57) a été établie en supposant la tension aux bornes de la machine synchrone invariable en amplitude et en fréquence. En pratique cette situation idéale ne peut être réalisée rigoureusement, du fait des impédances de liaison (notamment celle du transformateur) et du fait que les sources constituant le « réseau » sont elles-mêmes des machines synchrones, susceptibles de régimes transitoires.

Les lois exactes de variation ne peuvent être déterminées qu'à l'aide d'auxiliaires de calcul (analogique ou digital). Dans ce qui suit, quelques indications seront données sur la manière de prendre en compte le réseau (§ 2) puis sur la mise en forme des équations pour le calcul analogique ou digital (§ 3). Seule alors la résolution effective (numérique ou analogique) permettrait de se faire une idée des phénomènes susceptibles de se produire et de l'approche pratique des limites de stabilité transitoire.

Il est cependant souhaitable de se rendre compte, au moins de façon qualitative, des phénomènes qui se produisent. Dans ce but, on établit au paragraphe 5 un modèle simplifié du comportement de la machine synchrone en régime transitoire, basé sur des considérations physiques, permettant une première approche du problème de stabilité transitoire. L'intérêt de cette présentation est double : d'une part elle permet, lors d'un problème complexe, une première approximation conduisant à éliminer les solutions dépourvues d'intérêt, d'autre part elle fournit une vision physique des phénomènes qu'il n'est pas très facile de dégager d'un système d'équations complet et rigoureux.

A l'étude des grandes perturbations peut être rattaché le problème de l'« autosynchronisation », évoqué précédemment lors de l'étude du fonctionnement asynchrone. Il concerne le démarrage asynchrone, et consiste à étudier les conditions nécessaires pour qu'après la phase de fonctionnement asynchrone et la stabilisation à un glissement relativement faible, l'application de la tension d'excitation v_f permette de passer au régime synchrone proprement dit.

Nous n'aborderons pas l'étude de ce dernier problème, qui peut être traité de façon approchée par le modèle du paragraphe 5, comme cela a été fait en [9] et [22].

Une deuxième catégorie de problèmes à vitesse non constante est celle des *petites perturbations*.

La considération de perturbations assez petites, à partir d'un régime initial permanent synchrone, permet de linéariser le système d'équations différentielles ainsi que cela a été expliqué au chapitre II, paragraphe 3.

Les applications pratiques, qui seront illustrées au paragraphe 4, sont de deux sortes :

L'étude des oscillations forcées se présente par exemple dans le cas d'un alternateur entraîné par une machine à piston, dont le couple moteur oscille périodiquement autour de sa valeur moyenne. On peut se préoccuper de l'apparition de résonances dangereuses, et des moyens à mettre en œuvre pour y remédier.

Le comportement des machines synchrones vis-à-vis des petites perturbations intervient également dans les problèmes de *réglage*. Nous évoquerons ici principalement la *régulation de tension*, dont le rôle n'est pas limité au maintien de la tension aux bornes mais qui joue également un rôle prépondérant dans la stabilité de marche en parallèle.

Les petites variations les plus fréquemment considérées dans ce genre d'études sont les variations sinusoïdales et ce sont les seules que nous développerons, bien que d'autres types de variations (par exemple en échelon) soient aussi parfois utilisées dans les problèmes de réglage.

2 PRISE EN COMPTE DU RACCORDEMENT DE LA MACHINE SYNCHRONE AU RÉSEAU

Un réseau de transport d'énergie comporte un grand nombre de machines synchrones interconnectées ; une perturbation survenant en un point quelconque du réseau affecte donc l'ensemble des machines, et l'étude rigoureuse du processus nécessite en principe la prise en compte des régimes transitoires de toutes les machines. C'est bien ainsi que sont établis les programmes numériques d'étude de la stabilité des réseaux ; il serait très compliqué d'aborder d'emblée le problème sous cette forme, et il est préférable de considérer d'abord le cas très fréquemment rencontré en pratique, où la perturbation se produit au voisinage d'une machine synchrone qui sera de ce fait particulièrement affectée, la perturbation affectant les autres machines dans leur ensemble pouvant être considérée comme négligeable du fait de la puissance considérable qu'elles représentent vis-à-vis de la machine étudiée, et du fait de leur relatif éloignement par rapport à la perturbation.

Dans ces conditions le réseau, vu des bornes de la machine considérée, peut être remplacé par une f.é.m. triphasée, invariable en amplitude et en fréquence, en série avec une impédance triphasée, cette impédance pouvant être assimilée à une résistance en série avec une inductance. Le schéma monophasé équivalent de ce raccordement est représenté figure 10.1.

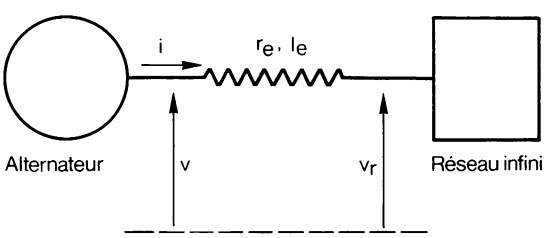


Fig. 10.1. — Schéma de principe du raccordement d'un alternateur raccordé à un réseau puissant.

Pour l'étude qui va suivre ces éléments seront exprimés en valeurs réduites, rapportées à la puissance apparente et à la tension nominales de la machine synchrone, selon les modalités exposées au chapitre VI.

La tension du réseau est alors caractérisée par la valeur réduite v_r et l'impédance de liaison par la résistance r_e et l'inductance l_e, à laquelle on peut associer, en régime permanent sinusoïdal, la réactance x_e

$$x_e = l_e \omega \,. \tag{10.1}$$

2.1 Régime permanent synchrone

Dans une première étape, nous pouvons étendre au cas présent l'étude faite au chapitre VI, paragraphe 2 : à l'équation (6.53) caractérisant le comportement de la machine synchrone seule, il suffit d'adjoindre l'équation classique du dipôle :

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - r_e \mathbf{i} - \mathrm{j}x_e \mathbf{i} \tag{10.2}$$

dans laquelle $\mathbf{v}_r$ est le nombre complexe associé à la tension v_r dans le plan complexe de la figure 6.2 qui se complète alors en la figure 10.2.

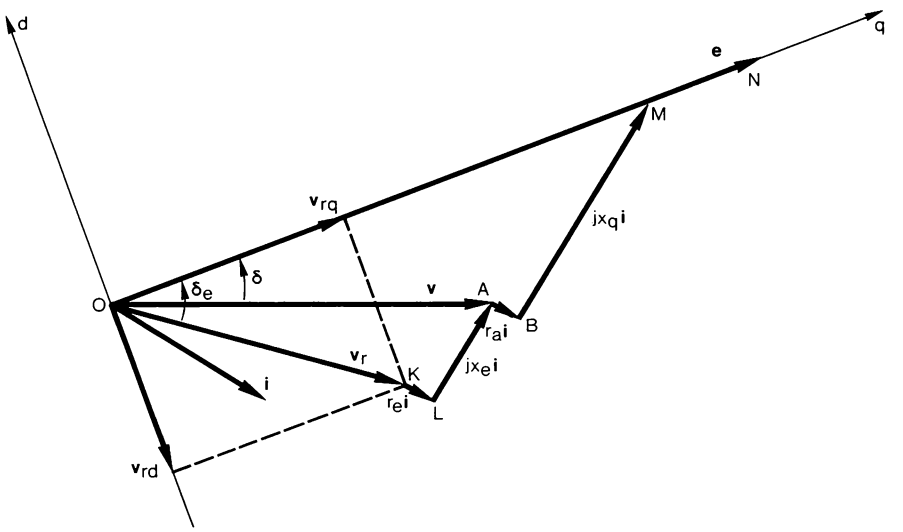


Fig. 10.2. — Diagramme vectoriel représentant le régime permanent synchrone d'un alternaeur raccordé à un réseau puissant.

Sur ce diagramme, on peut faire trois constatations :

— Un nouvel angle interne δ_e apparaît entre la tension $\mathbf{v}_r$ et la f.é.m. interne $\mathbf{e}$ de la machine synchrone. Nous l'appellerons *angle interne total.*

— Comme les autres grandeurs complexes, $\mathbf{v}_r$ se décompose, selon les axes O*d* et O*q*, en les composantes $\mathbf{v}_{rd}$ et $\mathbf{v}_{rq}$, dont les mesures sur ces axes peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} v_{rd} = -\, v_r \sin \delta_e \\ v_{rq} = \quad v_r \cos \delta_e \,. \end{cases} \tag{10.3}$$

— La projection du tracé OKLA sur les axes Od et Oq donne les relations :

$$\begin{cases} v_{rd} = v_d - r_e\, i_d - x_e\, i_q \\ v_{rq} = v_q - r_e\, i_q + x_e\, i_d \end{cases} \tag{10.4}$$

qui peuvent être considérés comme les projections de la relation (10.2). Ces notions vont être justifiées et précisées au paragraphe suivant.

2.2 Régimes variables

2.2.1 *Transformation de PARK appliquée à v_r ; intérêt de l'angle interne total δ_e*

Les tensions des trois phases du réseau ont pour loi de variation au cours du temps :

$$\begin{cases} v_{ra} = v_r \cos(\omega t + \lambda) \\ v_{rb} = v_r \cos\left(\omega t + \lambda - \dfrac{2\pi}{3}\right) \\ v_{rc} = v_r \cos\left(\omega t + \lambda - \dfrac{4\pi}{3}\right) \end{cases} \tag{10.5}$$

et, par hypothèse, v_r, ω et λ sont invariables au cours des perturbations.

Les composantes v_{rd} et v_{rq} peuvent s'obtenir de deux manières :

— Lors des perturbations, le diagramme de la figure 10.2 et les équations associées cessent d'être valables ; cependant il subsiste de ce diagramme d'une part le nombre complexe v_r, d'amplitude invariable et tournant à la vitesse ω, et d'autre part l'ensemble des axes perpendiculaires Od et Oq, puisqu'ils représentent la position angulaire du rotor par rapport au référentiel ω. Il en résulte que, lors des régimes variables, les relations (10.3) *continuent d'être valables*, et en outre l'angle δ_e apparaît comme devant beaucoup mieux caractériser le mouvement angulaire du rotor, que δ, qui s'appuie sur la tension v variable.

— On peut aussi appliquer à (10.5) la transformation de PARK (5.19) θ étant toujours l'angle que fait l'axe de la phase a de la machine avec l'axe Od de l'inducteur.

Il vient, en combinant (10.5) et (5.19) :

$$\begin{cases} v_{rd} = v_r \sin\left(\omega t + \lambda - \theta + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ v_{rq} = v_r \cos\left(\omega t + \lambda - \theta + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{10.6}$$

et comparant avec (10.3) on obtient :

$$\theta = \omega t + \lambda + \delta_e + \frac{\pi}{2} \qquad \text{(avec } \omega \text{ et } \lambda \text{ constants)}.$$

On obtient, en dérivant successivement :

$$\omega_r = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega + \frac{\mathrm{d}\delta_e}{\mathrm{d}t} \tag{10.7}$$

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{d^2\delta_e}{dt^2} \tag{10.8}$$

ce qui montre bien que δ_e peut être choisi comme variable caractérisant le mouvement du rotor.

2.2.2 *Equations de la liaison en régime variable; équations complètes*

Compte tenu des hypothèses faites sur la liaison, son équation phase par phase s'écrit, en régime quelconque :

$$\begin{cases} v_{ra} = v_a - r_e\, i_a - l_e \dfrac{di_a}{dt} \\ v_{rb} = v_b - r_e\, i_b - l_e \dfrac{di_b}{dt} \\ v_{rc} = v_c - r_e\, i_c - l_e \dfrac{di_c}{dt}\,. \end{cases} \tag{10.9}$$

Appliquant à ce système la transformation de PARK selon la même méthode qu'au chapitre V, paragraphe 4, il vient en rappelant aussi les relations (10.3)

$$\begin{cases} v_{rd} = -\, v_r \sin\delta_e = v_d - r_e\, i_d - l_e \dfrac{di_d}{dt} - l_e\, \omega_r\, i_q \\ v_{rq} = v_r \cos\delta_e = v_q - r_e\, i_q - l_e \dfrac{di_q}{dt} + l_e\, \omega_r\, i_d\,. \end{cases} \tag{10.10}$$

On vérifie qu'en régime permanent synchrone on retrouve bien (10.4).

Il ne reste plus qu'à compléter par les équations de la machine synchrone, qu'on doit écrire sous forme temporelle puisque ces équations ne sont pas linéaires.

Tout d'abord, les équations de PARK (6.26) et (6.27) que nous récrivons ici :

$$\begin{cases} v_d = -\dfrac{d\psi_d}{dt} - \psi_q\, \omega_r - r_a\, i_d \\ v_q = -\dfrac{d\psi_q}{dt} + \psi_d\, \omega_r - r_a\, i_q \end{cases} \tag{10.11}$$

et d'autre part, les équations :

— électriques du rotor (6.30), (6.31), (6.32)
— magnétiques (6.37), (6.38)
— mécaniques (6.9), (6.41).

Ces équations sont inchangées, mais la dernière peut s'écrire compte tenu de (10.8) :

$$c_m - c_e = \frac{2\,H}{\omega} \frac{d^2\delta_e}{dt^2}\,. \tag{10.12}$$

Ainsi la prise en considération du raccordement à une source invariable de tension (souvent appelée « réseau infini ») permet de retrouver le même paramètre δ_e dans le couple d'accélération d'une part, et d'autre part dans les conditions de raccordement électrique, c'est-à-dire en définitive dans le couple électromagnétique.

2.2.3 *Simplifications dans les cas usuels*

Les simplifications que nous allons indiquer concernent les équations (10.10) et (10.11). Elles sont souvent adoptées dans le type de problèmes considérés ici, c'est-à-dire lors de perturbations au cours desquelles la vitesse s'écarte peu de la vitesse synchrone : elles doivent évidemment être reconsidérées avec soin en fonction du type de problème rencontré.

Les simplifications, que nous mettrons en œuvre lors des exemples traités plus loin, sont les suivantes :

— On néglige les variations de ω_r et on remplace ω_r par ω.

— On néglige les termes en $\frac{di}{dt}$ ou $\frac{d\psi}{dt}$ (f.é.m. de transformation) devant les termes en ωi ou $\omega\psi$ (f.é.m. de rotation). Les premiers interviennent en effet pour une analyse fine du comportement interne de la machine (exemple : courants et couples de court-circuit) mais leur incidence sur les échanges d'énergie entre la machine et le milieu extérieur, et donc sur la loi du mouvement, n'est pas considérable.

— On négligera parfois les résistances r_a et r_e (bien qu'elle soit aussi justifiée que les précédentes du point de vue des ordres de grandeur, cette simplification est moins avantageuse mathématiquement, car elle ne diminue pas l'ordre du système différentiel).

Nous arrivons donc, en ce qui concerne les équations (10.10) et (10.11), à l'écriture :

$$\begin{cases} v_{rd} = -v_r \sin\delta_e = v_d - r_e\, i_d - x_e\, i_q \\ v_{rq} = v_r \cos\delta_e = v_q - r_e\, i_q + x_e\, i_d \end{cases} \tag{10.13}$$

$$\begin{cases} v_d = -\psi_q\,\omega - r_a\, i_d \\ v_q = \psi_d\,\omega - r_a\, i_q\,. \end{cases} \tag{10.14}$$

3 MÉTHODE D'ÉTUDE DES GRANDES PERTURBATIONS

Malgré les simplifications, le système d'équations est non linéaire, en raison de (6.9) et (10.13).

Nous allons exposer le principe de la mise en équations en vue de la résolution sur calculateur analogique ou sur ordinateur par une méthode pas à pas. Pour faire comprendre la méthode, nous allons simplifier le modèle de la machine synchrone en négligeant la présence des amortisseurs. Cette simplification peut d'ailleurs être adoptée comme première approximation dans les études de stabilité transitoire, ainsi que cela sera expliqué au paragraphe 5.

Dans cès conditions, aux équations (10.13) et (10.14) doivent être ajoutées les équations suivantes provenant de (6.30), (6.37), (6.38), (6.9), (6.41) et (10.7) après multiplication de certains flux par ω et remplacement des l associés par x :

$$v_f = \frac{\mathrm{d}\psi_f}{\mathrm{d}t} + r_f\, i_f \tag{10.15}$$

$$\begin{vmatrix} \omega\psi_d \\ \omega\psi_f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_d & x_{af} \\ x_{af} & x_{ff} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_d \\ i_f \end{vmatrix} \tag{10.16}$$

$$\omega\psi_q = x_q\, i_q \tag{10.17}$$

$$c_e = \omega(\psi_d\, i_q - \psi_q\, i_d) \tag{10.18}$$

$$c_m - c_e = \frac{2\,\mathrm{H}}{\omega}\,\frac{\mathrm{d}\omega_r}{\mathrm{d}t} \tag{10.19}$$

$$\omega_r = \omega + \frac{\mathrm{d}\delta_e}{\mathrm{d}t}\,. \tag{10.20}$$

Ce système différentiel du troisième ordre peut être directement transcrit sur analyseur différentiel.

Pour le traitement sur ordinateur par une méthode pas à pas, il est intéressant de conserver constantes, lors des itérations, les grandeurs variant lentement ; c'est en général le cas des grandeurs intervenant par leurs dérivées, soit ici ω_r, δ_e et ψ_f.

Nous allons donc nous intéresser à l'équation (10.15), et, pour la rendre plus explicite, lui faire subir un changement d'échelle.

En effet, on a remarqué, au chapitre VI, paragraphe 2.2, que la valeur réduite de i_f n'est pas 1 au régime nominal à vide non saturé, non plus d'ailleurs que v_f. Cela provient du choix fait au chapitre VI des valeurs de base, conditionnées par des considérations de rapport de nombre de spires, comme pour les transformateurs.

Il nous suffit alors de multiplier tous les termes de l'équation (10.15) par x_{af}/r_f et d'introduire les deux nouvelles grandeurs :

$$e_{if} = x_{af}\, i_f \tag{10.21}$$

$$e_{vf} = \frac{x_{af}}{r_f}\, v_f\,. \tag{10.22}$$

e_{if} est proportionnel au courant d'excitation, mais d'après (6.48) il a même valeur réduite que la f.é.m. e que ce courant produit à vide et en non saturé. On peut aussi dire que e_{if} est, en valeur réduite, la f.é.m. que produirait le courant i_f seul en régime permanent. e_{vf} est proportionnel à la tension d'excitation mais d'après (6.45) et (6.48) il a même valeur réduite que la f.é.m. produite à vide en non saturé par la tension d'excitation v_f. On peut dire que e_{vf} est, en valeur réduite, la f.é.m. que produirait la tension v_f seule en régime permanent.

Remarque : On vérifiera sans peine que :

$$e_{if}(\text{p.u.}) = \frac{i_f(\text{A})}{\mathrm{I}_{f0}}$$

$$e_{vf}(\text{p.u.}) = \frac{v_f(\text{V})}{\mathrm{V}_{f0}}$$

en appelant I_{f0} et V_{f0} le courant et la tension d'excitation donnant la tension nominale à vide et en non saturé.

Il en résulte en particulier que la caractéristique à vide non saturée, en valeurs réduites, dans les axes (e_{if}, e), est une droite de pente 1 (fig. 10.3).

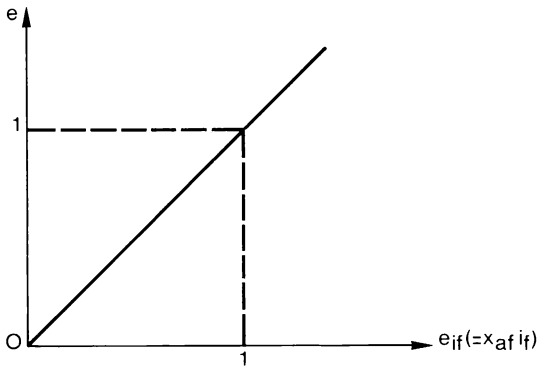


Fig. 10.3. — Caractéristique à vide, en valeurs réduites, lorsqu'on exprime le courant inducteur à l'aide de la quantité e_{if}.

En régime variable, et moyennant ce changement de variables, (10.15) devient :

$$\frac{x_{af}}{r_f} \cdot \frac{d\psi_f}{dt} = e_{vf} - e_{if} \,. \tag{10.23}$$

Cette équation traduit la tendance de l'enroulement inducteur à conserver le flux qui le traverse. A ce flux est associée dans l'induit une f.é.m. de rotation e'_q, dite « f.é.m. transitoire », donnée par

$$e'_q = \frac{x_{af}}{x_{ff}} \omega \psi_f \,. \tag{10.24}$$

On introduit alors

— la réactance transitoire

$$x'_d = x_d - \frac{x_{af}^2}{x_{ff}}$$

— la constante de temps de l'inducteur, l'induit étant à circuit ouvert

$$T'_{do} = \frac{x_{ff}}{\omega r_f}$$

conformes au chapitre VII, paragraphe 7.3, en raison des équivalences

$$x_{af} = x_{md} \,, \quad x_{ff} = x_f + x_{md} \,, \quad x_d = x_a + x_{md} \,.$$

Les équations (10.14) à (10.17) se transforment en les suivantes :

$$v_d = - x_q i_q - r_a i_d \tag{10.25}$$

$$v_q = e'_q + x'_d i_d - r_a i_q \tag{10.26}$$

$$e_{if} = e'_q - (x_d - x'_d) i_d \tag{10.27}$$

$$\frac{de'_q}{dt} = \frac{1}{T'_{do}} (e_{vf} - e_{if}) \,. \tag{10.28}$$

Ces équations combinées avec (10.13), (10.18), (10.19) et (10.20) permettent une transcription commode sur analyseur différentiel ou sur calculateur numérique, en vue de résoudre des problèmes de grandes perturbations.

L'intérêt de ces notations est d'être exprimées en unités réduites ramenées à l'induit. En régime permanent, elles peuvent être interprétées graphiquement comme projections sur les axes Od et Oq des figures 6.2 ou 10.2. Pour cela on peut associer des nombres complexes, relatifs au régime permanent, aux nouvelles grandeurs e'_q, e_{if}, e_{vf}.

La quantité $\mathbf{e}'_q$ s'obtient en portant $jx'_d\,\mathbf{i} = \mathbf{BC}$ à partir de B (fig. 10.4), puis en projetant C en D sur l'axe Oq.

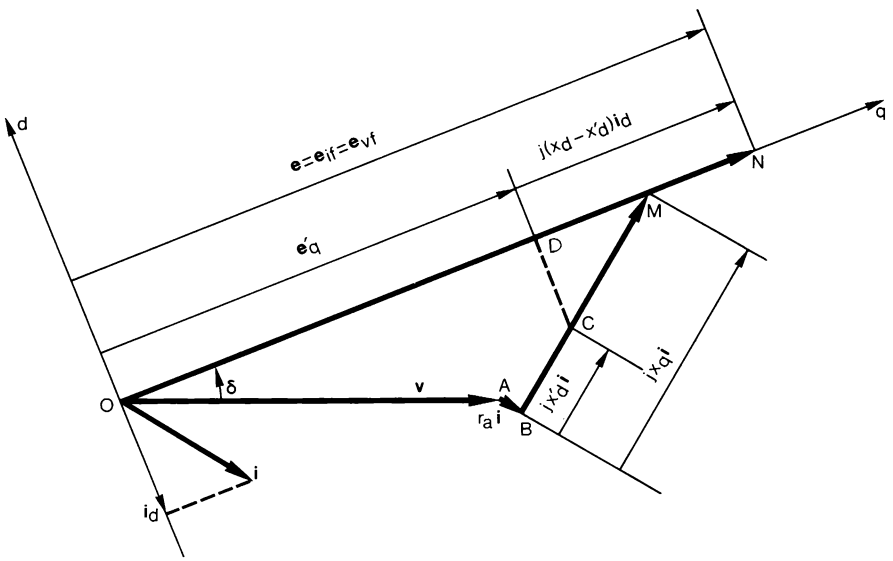


Fig. 10.4. — Représentation de la f.é.m. e'_q en régime permanent.

$\mathbf{e}_{vf}$ et $\mathbf{e}_{if}$ sont confondus avec $\mathbf{e}$, selon **ON**.

Par cette construction se justifie la dénomination souvent donnée à e'_q de « f.é.m. derrière la réactance transitoire ». Au début d'une perturbation, en raison de (10.28) e'_q ne varie pas rapidement et cette propriété est utilisée au paragraphe 5 pour l'établissement du modèle simplifié dit « à invariance transitoire ».

La prise en compte des amortisseurs ne présente aucune difficulté de principe et la mise en forme des équations s'effectue de façon similaire [11]. On doit alors utiliser l'ensemble des équations (6.30), (6.31), (6.32), (6.37), (6.38) ; le système différentiel devient du 5e ordre et il est avantageux d'effectuer de nouveaux changements de variables consistant à exprimer les courants et flux amortisseurs à l'échelle des f.é.m. de rotation qu'ils créeraient individuellement dans l'induit.

4 MÉTHODE D'ÉTUDE DES PETITES PERTURBATIONS

4.1 Mise en équations générale

Nous devons d'une part expliciter les équations représentant le régime permanent synchrone, et d'autre part différencier les relations générales. Cette dernière

opération peut être effectuée directement en notation opérationnelle, pour s'appliquer par exemple à l'étude de la réponse impulsionnelle, et pour le passage au régime harmonique (petites oscillations sinusoïdales) il s'obtient simplement, à partir de la notation opérationnelle, en passant aux nombres complexes et en remplaçant p par $j\Omega$, Ω étant la pulsation de sollicitation.

On peut donc éviter de reprendre l'ensemble des équations différentielles, et utiliser les expressions opérationnelles établies au début du chapitre VII, avec prise en compte des amortisseurs.

Le régime permanent s'écrit à partir des relations (10.13) à (10.20) en annulant les dérivées par rapport au temps et affectant les grandeurs de l'indice 0 ; on rappelle qu'en régime permanent, e_{vf0} est égale à la f.é.m. interne e_0

$$(10.29)\qquad \begin{cases} -v_r \sin \delta_{e0} = v_{d0} - x_e\, i_{q0} - r_e\, i_{d0} \\ v_r \cos \delta_{e0} = v_{q0} + x_e\, i_{d0} - r_e\, i_{q0} \\ v_{d0} = -\psi_{q0}\,\omega - r_a\, i_{d0} \\ v_{q0} = \psi_{d0}\,\omega - r_a\, i_{q0} \\ \omega\psi_{d0} = x_d\, i_{d0} + e_0 \\ \omega\psi_{q0} = x_q\, i_{q0} \\ c_{m0} = c_{e0} = \omega(\psi_{d0}\, i_{q0} - \psi_{q0}\, i_{d0})\,. \end{cases}$$

Les petites variations sont caractérisées par le symbole Δ ; on les exprime pour commencer sous forme opérationnelle, en différenciant :

— les équations électriques (10.13) et (10.14) ;

— les expressions des flux (7.6) et (7.7) ; en utilisant à nouveau (10.22) on voit que $g(p)$ donné par (7.9) sera changé d'échelle ; la nouvelle fonction sera appelée $f(p)$ (fonction d'excitation) et donnée par :

$$(10.30)\qquad f(p) = \frac{r_f}{m_{af}}\, g(p) = \frac{1 + \mathrm{T_D}\, p}{(1 + \mathrm{T'_{do}}\, p)\,(1 + \mathrm{T''_{do}}\, p)}\,.$$

tendant vers 1 pour p tendant vers zéro ;

— les équations mécaniques (10.18), (10.19), (10.20).

On obtient alors, en considérant les Δ comme fonctions de p :

$$(10.31)\qquad \begin{cases} -v_r \cos \delta_{e0}\, \Delta\delta_e = \Delta v_d - x_e\, \Delta i_q - r_e\, \Delta i_d \\ -v_r \sin \delta_{e0}\, \Delta\delta_e = \Delta v_q + x_e\, \Delta i_d - r_e\, \Delta i_q \end{cases}$$

$$(10.32)\qquad \begin{cases} \Delta v_d = -\omega\, \Delta\psi_q - r_a\, \Delta i_d \\ \Delta v_q = \omega\, \Delta\psi_d - r_a\, \Delta i_q \end{cases}$$

$$(10.33)\qquad \omega\, \Delta\psi_d = x_d(p)\, \Delta i_d + f(p)\, \Delta e_{vf}$$

$$(10.34)\qquad \omega\, \Delta\psi_q = x_q(p)\, \Delta i_q$$

$$(10.35)\qquad \Delta c_e = \omega(\psi_{d0}\, \Delta i_q + i_{q0}\, \Delta\psi_d - \psi_{q0}\, \Delta i_d - i_{d0}\, \Delta\psi_q)$$

$$(10.36)\qquad \Delta c_m - \Delta c_e = \frac{2\,\mathrm{H}}{\omega}\, p^2\, \Delta\delta_e\,.$$

4.2 Premier exemple d'application : oscillations forcées

Considérons par exemple le cas d'un alternateur entraîné par un moteur dont le couple oscille de façon pulsatoire autour d'une valeur moyenne ; si T est la période fondamentale de l'oscillation,

$$\Omega = 2\pi/T$$

en sera la pulsation fondamentale, et le couple moteur peut être décomposé en série de FOURIER sous la forme :

$$c_m(t) = c_{m0} + c_{m1}\cos(\Omega t - \varphi_1) + c_{m2}\cos(2\Omega t - \varphi_2) + \cdots .$$

les amplitudes c_{m1}, c_{m2} ... étant généralement faibles devant c_{m0}.

L'étude des oscillations d'angle résultant de l'existence de ce couple moteur peut se faire de façon générale en traduisant les équations précédentes en régime harmonique : pour chaque pulsation $k\Omega$ (k entier) les variations sont considérées comme des nombres complexes associés à l'opérateur $e^{jk\Omega t}$, que l'on élimine ensuite car il apparaît partout en facteur, et p doit être remplacé partout par $jk\Omega$.

Les équations (10.31) à (10.35) permettent d'expliciter le quotient $\dfrac{\Delta \mathbf{c}_e}{\Delta \boldsymbol{\delta}_e}$ en fonction de Ω.

Nous allons effectuer ce calcul dans les conditions suivantes :

— nous négligeons les résistances r_e et r_a

— nous supposons $\Delta \mathbf{e}_{vf} = 0$ (tension d'excitation constante).

Des relations (10.29) et (10.31) à (10.34) on tire alors dans ces conditions :

$$\begin{aligned}
\omega\psi_{d0} &= v_r \cos\delta_{e0} - x_e\, i_{d0} = x_d\, i_{d0} + e_0 \\
\omega\psi_{q0} &= v_r \sin\delta_{e0} - x_e\, i_{q0} = x_q\, i_{q0} \\
\omega\,\Delta\boldsymbol{\psi}_d &= -\,v_r \sin\delta_{e0}\,\Delta\boldsymbol{\delta}_e - x_e\,\Delta\mathbf{i}_d = \mathbf{x}_d(j\Omega)\,\Delta\mathbf{i}_d \\
\omega\,\Delta\boldsymbol{\psi}_q &= v_r \cos\delta_{e0}\,\Delta\boldsymbol{\delta}_e - x_e\,\Delta\mathbf{i}_q = \mathbf{x}_q(j\Omega)\,\Delta\mathbf{i}_q
\end{aligned}$$

d'où en résolvant par rapport aux courants et flux et portant dans (10.35) il vient :

$$(10.37)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta \mathbf{c}_e}{\Delta \boldsymbol{\delta}_e} = {} & \frac{e_0\, v_r \cos\delta_{e0}}{x_e + x_d} + v_r^2 \cos^2\delta_{e0}\left[\frac{1}{x_e + \mathbf{x}_q(j\Omega)} - \frac{1}{x_e + x_d}\right] + \cdots \\ & \cdots + v_r^2 \sin^2\delta_{e0}\left[\frac{1}{x_e + \mathbf{x}_d(j\Omega)} - \frac{1}{x_e + x_q}\right]. \end{aligned} \right.$$

En explicitant cette expression à l'aide de (7.14) et (7.15) où l'on fait $p = j\Omega$, on voit que (10.37) peut se mettre sous la forme

$$(10.38)\qquad \frac{\Delta \mathbf{c}_e}{\Delta \boldsymbol{\delta}_e} = k_s(\Omega) + j\Omega k_a(\Omega)$$

k_s est une fonction réelle croissante de Ω, et k_a une fonction réelle décroissante ; leurs valeurs numériques, dépendant des paramètres du système et du régime

initial, ne varient pas dans des proportions considérables pour les valeurs intéressantes de Ω (compris entre 0 et quelques dizaines de rad/s.).

L'équation du mouvement (10.36) prend alors la forme, en régime harmonique :

$$\Delta \mathbf{c}_m = k_s(\Omega)\,\Delta\boldsymbol{\delta}_e + j\Omega k_a(\Omega)\,\Delta\boldsymbol{\delta}_e - \Omega^2 \cdot \frac{2\,H}{\omega}\,\Delta\boldsymbol{\delta}_e . \tag{10.39}$$

Du fait des ordres de grandeur en jeu, dont une estimation sera faite au paragraphe 5, cette équation montre que le régime libre du système est oscillatoire amorti, la pseudo-pulsation dépendant des valeurs de H et de k_s et l'amortissement dépendant des valeurs de $k_a.k_s$ apparaît donc comme caractérisant un couple de rappel, et k_a un couple d'amortissement.

En régime d'oscillations forcées ($\Delta \mathbf{c}_m$ imposé), l'amplitude des oscillations de δ_e présente donc un maximum en fonction de Ω, atténué grâce à la présence de k_a. Cet amortissement est surtout dû à la présence des amortisseurs.

Si les amortisseurs étaient absents, ce qui revient pratiquement à faire $T''_d = 0$ et $T''_q = 0$ dans (7.14) et (7.15), k_a serait beaucoup plus faible et au voisinage de la résonance l'amplitude des oscillations angulaires serait considérablement augmentée.

4.3 Deuxième exemple d'application : réglage de tension et stabilité statique

Nous n'allons pas ici traiter le problème du réglage de tension, mais simplement montrer une des manières de le mettre en forme dans le cas du fonctionnement en alternateur débitant sur le réseau, et en déduire quelques observations intéressantes.

La figure 10.5 représente le bloc diagramme correspondant à la mise en œuvre la plus simple de ce principe ; en pratique, le schéma est souvent plus compliqué par la mise en place de diverses boucles de retour, ayant des fonctions de transfert appropriées, et pouvant faire intervenir des signaux additionnels tels que la puissance, l'angle interne, etc... ainsi que leurs dérivées par rapport au temps.

Dans l'exemple présent, nous considérerons seulement le cas de la figure 10.5 en remarquant qu'on a affecté v_f du changement d'échelle (10.22).

Les éléments de la chaîne partielle A_1 comportent essentiellement des étages amplificateurs, l'étage final étant l'excitatrice proprement dite.

Les performances du réglage de tension dépendent bien entendu de la fonction de transfert de la chaîne partielle A_2 entre les tensions v et $e_{v.f}$, que nous allons

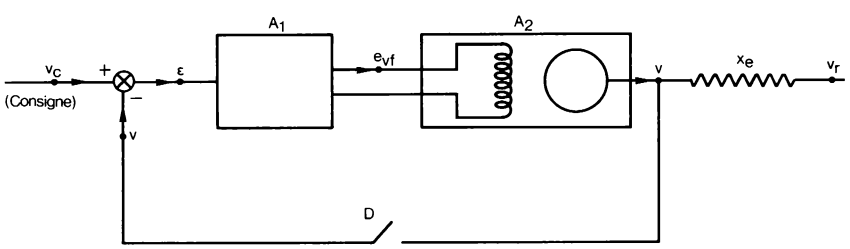


Fig. 10.5. — Schéma de principe d'un alternateur muni d'un régulateur de tension.

étudier en boucle ouverte (interrupteur D ouvert), mais en tenant compte du raccordement au réseau.

Comme dans l'exemple précédent, nous utilisons la méthode de l'analyse harmonique, appliquée aux équations (10.31) à (10.36) avec les deux simplifications suivantes :

— on néglige les résistances r_a et r_e

— on néglige la présence des amortisseurs ; cette deuxième simplification n'est valable qu'en première approximation ; elle se justifie par le fait que, comme on le constatera, la gamme de pulsations, qui se révélera significative pour l'étude de la stabilité est suffisamment basse. De ce fait, dans les expressions issues de (7.9), (7.12) et (7.13), les termes du type $1 + j\Omega T$, avec $T = T_D$, T'_d, T''_{do}, T''_q, T''_{qo}, sont voisins de l'unité. On écrira donc, dans le cadre du présent paragraphe :

$$f(p) = \frac{1}{1 + T'_{do}\, p} \tag{10.40}$$

$$x_d(p) = x_d \cdot \frac{1 + T'_d\, p}{1 + T'_{do}\, p} \tag{10.41}$$

$$x_q(p) = x_q\,. \tag{10.42}$$

Du fait qu'on doit laisser explicitée la tension aux bornes v, la réactance extérieure x_e ne sera pas cette fois-ci incorporée à $x_d(p)$ et $x_q(p)$.

D'autre part v est caractérisée, en régime permanent et en régime variable, par :

$$v_0^2 = v_{do}^2 + v_{qo}^2 \tag{10.43}$$

$$v_0\, \Delta v = v_{do}\, \Delta v_d + v_{qo}\, \Delta v_q \tag{10.44}$$

Enfin, on supposera le couple mécanique invariable ($\Delta c_m = 0$).

En résolvant alors par rapport à Δv et Δe_{vf} le système (10.31) à (10.36), compte tenu des conditions particulières ci-dessus, il vient une expression de la forme (en la laissant pour le moment sous forme opérationnelle) :

$$\frac{\Delta v}{\Delta e_{vf}} = \frac{a_0 + a_2\, p^2}{b_0 + b_1\, p + b_2\, p^2 + b_3\, p^3} \tag{10.45}$$

que nous n'expliciterons pas mais sur laquelle on peut donner des informations qualitatives intéressantes.

Les coefficients a_0, a_2, b_0, b_1, b_2, b_3 sont fonctions d'une part des paramètres de l'alternateur et du réseau, d'autre part du régime initial.

Le polynôme figurant au dénominateur représente l'équation caractéristique du système linéaire à résoudre, et l'analyse des racines de l'équation :

$$b_0 + b_1\, p + b_2\, p^2 + b_3\, p^3 = 0 \tag{10.46}$$

permet d'appliquer les critères de stabilité élémentaires.

Le critère de ROUTH, par exemple, donne pour conditions de stabilité que b_0, b_1, b_2, b_3 soient de même signe et qu'en outre $b_1\, b_2 - b_0\, b_3 > 0$.

Ce critère, appliqué à l'équation (10.46), redonne simplement la condition de stabilité statique naturelle $c_s > 0$, avec c_s donné par (6.58) mais en tenant compte de la réactance extérieure x_e, soit :

$$\cos 2\,\delta_{e0}\,\frac{x_d - x_q}{x_q + x_e} + \frac{e_0}{v_r}\cos\delta_{e0} > 0\,.$$

Lorsque δ_e est supérieur à la limite δ_{em} donnée par cette inégalité, le fonctionnement est naturellement instable. Nous nous proposons de montrer qu'il est possible, au moyen d'un régulateur de tension, d'obtenir un fonctionnement stable même au-delà de cette limite.

Pour cela, nous utilisons la méthode de l'analyse harmonique et nous formons le nombre complexe obtenu à partir de (10.45) en remplaçant p par $j\Omega$

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta \mathbf{e}_{vf}} = \frac{a_0 - a_2\,\Omega^2}{b_0 + j\Omega b_1 - b_2\,\Omega^2 - jb_3\,\Omega^3}\,. \tag{10.47}$$

Ce nombre complexe, fonction de Ω, est la transmittance harmonique de l'alternateur considéré comme un système dont la grandeur d'entrée est e_{vf} (tension d'excitation) et la grandeur de sortie est v (tension aux bornes).

Examinons l'allure de cette fonction, obtenue à partir des données numériques d'un alternateur réel. Il s'agit d'un alternateur à entrefer constant, c'est-à-dire pour lequel $x_d = x_q$, dont l'angle limite δ_{em} est égal à 90°. Sur la figure 10.6 sont tracées, en coordonnées de BLACK-NICHOLS, les courbes représentatives de la fonction (10.47) : $\dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta \mathbf{e}_{vf}} = \mathbf{f}(\Omega)$, l'alternateur débitant sa puissance active nominale et l'angle δ_{e0} prenant deux valeurs particulières : 67° (courbe 1) et 110° (courbe 2) ; ces courbes sont graduées en Ω.

On sait que la stabilité pratique d'un système asservi se traduit par le fait que la courbe représentative de la transmittance harmonique, décrite dans le sens des Ω croissants, doit laisser sur sa droite la courbe de résonance à 2,3 dB représentée sur la figure 10.6. Notons bien que les courbes 1 et 2 ne représentent pas la fonction de transfert de toute la boucle ouverte, mais seulement de l'alternateur lié au réseau (A_2, figure 10.5).

L'examen de la figure 10.6 montre bien que le fonctionnement sans régulateur est stable pour $\delta_{e0} = 67°$, instable pour $\delta_{e0} = 110°$. D'une façon générale d'ailleurs, toutes les courbes pour $\delta_{e0} < 90°$ ont la même allure, et partent pour $\Omega = 0$ d'un point situé sur la verticale 0°. La courbe entière n'est pas représentée, mais elle laisse toujours sur sa droite la résonance à 2,3 dB.

Pour un angle δ_{e0} supérieur à 90°, par contre, les courbes partent pour $\Omega = 0$ d'un point situé sur la verticale − 180° au-dessous de l'ordonnée 0 dB, et présentent la même allure que la courbe 2 (exemple : courbe 3, fig. 10.6 pour $\delta_{e0} = 126°$).

Examinons alors comment se traduit l'influence d'un régulateur de tension, dans l'hypothèse où on assimile la fonction de transfert de la chaîne partielle A_1, figure 10.5, à un coefficient d'amplification K et une constante de temps T :

$$\frac{\Delta e_{vf}}{\Delta \varepsilon} = \frac{K}{1 + Tp}\,. \tag{10.48}$$

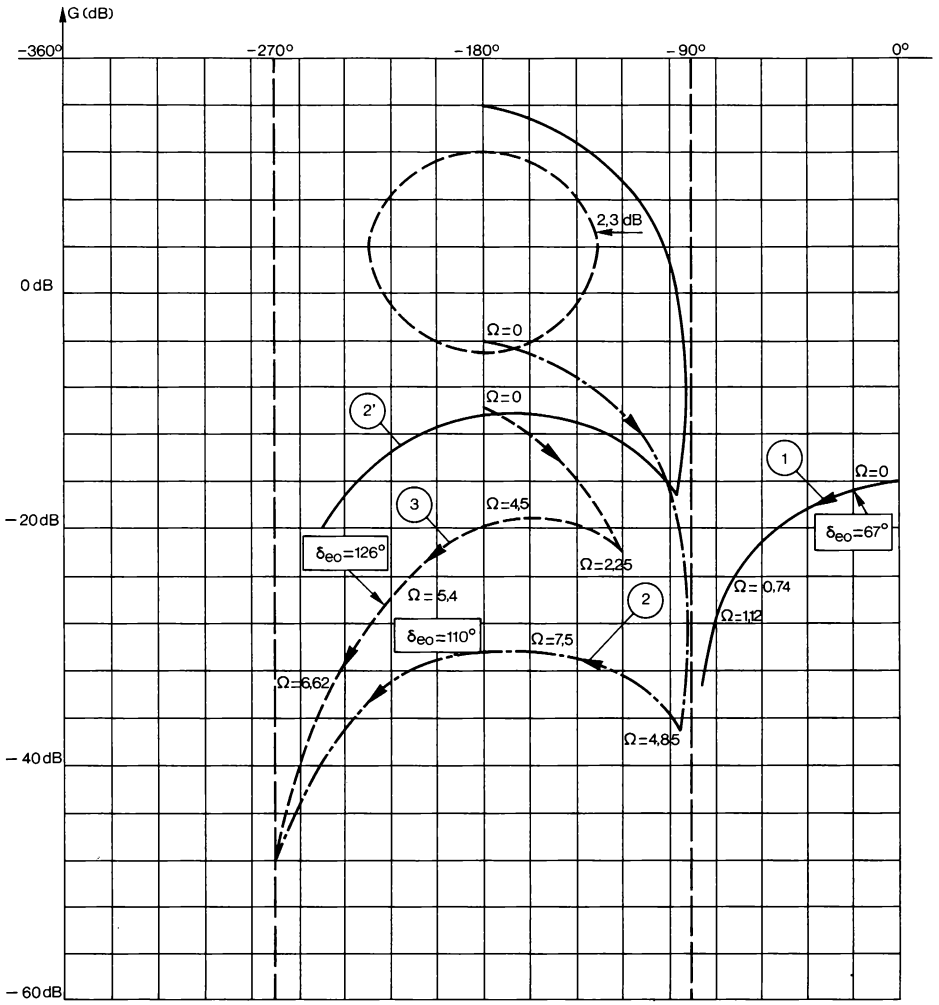


Fig. 10.6. — Courbes de réponse, en coordonnées de BLACK, d'un alternateur raccordé à un réseau puissant.

En pratique, une telle hypothèse revient à considérer que tous les éléments de la chaîne partielle A_1, figure 10.5 (amplificateurs et excitatrice) sont assimilables à des amplificateurs purs, à l'exception de l'excitatrice elle-même, dont la constante de temps n'est pas négligeable. Le coefficient K est le produit des gains statiques de tous les éléments de A_1, figure 10.5.

En régime harmonique, l'expression (10.48) s'écrit :

$$\frac{\Delta \mathbf{e}_{vf}}{\Delta \varepsilon} = \frac{K}{1 + j\Omega T} \tag{10.49}$$

et la fonction de transfert de l'ensemble de la chaîne ouverte, alternateur plus

dispositif d'excitation, s'obtient compte tenu des coordonnées adoptées par la simple addition des abscisses et des ordonnées des deux courbes

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta \mathbf{e}_{vf}} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta \mathbf{e}_{vf}}{\Delta \varepsilon} \quad \text{pour une même valeur de } \Omega .$$

Négligeons tout d'abord la constante de temps T. L'influence du système de réglage se traduit par une translation verticale de toutes les courbes, de valeur $20 \log_{10} K$. Cette translation ne modifie en rien la stabilité du régime correspondant à la courbe 1. Par contre, si K est tel que la courbe 2 soit translatée en 2′ par exemple, le système est maintenant stable.

Si maintenant on tient compte de T, on voit que son influence se traduit, quand Ω croît, par une légère diminution du module $\left| \frac{\Delta \mathbf{e}_{vf}}{\Delta \varepsilon} \right|$ et par un accroissement du déphasage en valeur absolue. Les propriétés de stabilité correspondant à la courbe 2′ seront peu affectées par cette modification à condition que T ne soit pas trop élevé.

La méthode qui vient d'être exposée permet de déterminer les paramètres du système d'excitation (K et T) les plus propres à assurer la stabilité pour un angle de fonctionnement supérieur à 90°, l'avantage d'une telle possibilité étant d'accroître la capacité des alternateurs en absorption de puissance réactive.

D'après la figure 10.6, courbe 2, nous voyons que la gamme de pulsations qui intervient dans l'évaluation de la stabilité aux grands angles s'étend de 0 à 8 rad/s environ. Les constantes de temps subtransitoires étant de l'ordre de 0,02 à 0,05 s, on justifie ainsi *a posteriori* le fait d'avoir négligé les amortisseurs dans ce problème : les fractions de la forme

$$\frac{1 + T''_d p}{1 + T''_{do} p}$$

en régime harmonique sont effectivement, dans la zone intéressante, très voisines du nombre réel 1 en module et en phase.

On remarque qu'une telle performance ne peut être obtenue à partir d'un régime où l'angle initial δ_{e0} serait notablement supérieur à 110°. Par exemple, la transmittance harmonique de l'alternateur pour un angle $\delta_{e0} = 126°$ a été tracée figure 10.6 courbe 3. Une translation verticale de cette courbe ne lui permet pas d'entourer sans la couper la courbe de résonance à 2,3 dB. Un régulateur de tension de gain bien ajusté permettrait donc dans un tel cas un fonctionnement à cet angle, mais la stabilité serait mauvaise et le régime comporterait des oscillations mal amorties.

5 MÉTHODE D'ÉTUDE TRÈS SIMPLIFIÉE DES RÉGIMES D'OSCILLATIONS DE PETITE OU GRANDE AMPLITUDE, A PARTIR D'UN FONCTIONNEMENT SYNCHRONE

L'objet de ce paragraphe est d'établir un modèle simplifié capable de rendre compte de façon approximative des oscillations de petite et grande amplitude d'une machine synchrone reliée au réseau, afin d'expliquer qualitativement et

d'évaluer quantitativement les phénomènes tels qu'oscillations naturelles ou forcées, amortissements, aptitude au retour à un régime synchrone après une perturbation de grande amplitude.

Pour cela nous allons montrer que lors des phénomènes usuellement rencontrés et compte tenu des ordres de grandeurs habituels des paramètres des machines synchrones, on peut établir une expression approchée du couple électromagnétique c_e faisant intervenir comme variable le seul angle interne total δ_e et sa dérivée par rapport au temps, soit :

$$c_e = c_{es}(\delta_e) + c_{ea}\left(\frac{\mathrm{d}\delta_e}{\mathrm{d}t}\right) \tag{10.50}$$

de sorte que, en portant dans (10.12), la loi du mouvement se ramène à la simple résolution d'une équation différentielle du 2e ordre.

Le fait que c_e fasse intervenir δ_e et sa dérivée première est suggéré par l'équation (10.37) et sa décomposition (10.38) en partie réelle et imaginaire. Nous n'allons pas partir de cette relation puisqu'elle n'est valable qu'en petites oscillations, mais nous voyons bien d'après elle que la réussite de notre propos nécessite de s'affranchir des lois de variation de k_s et k_a en fonction de Ω.

Le raisonnement est le suivant. En combinant (10.12) et (10.50) il vient :

$$c_m = c_{es}(\delta_e) + c_{ea}\left(\frac{\mathrm{d}\delta_e}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{2\,\mathrm{H}}{\omega}\,\frac{\mathrm{d}^2\delta_e}{\mathrm{d}t^2}. \tag{10.51}$$

Le couple c_{es}, de nature synchrone, est dû à l'interaction magnétique entre les polarités imposées à l'inducteur par le courant d'excitation, et les polarités prenant naissance à l'induit du fait de son raccordement au réseau.

Une première approximation de $c_{es}(\delta_e)$ sera donc une fonction périodique de δ_e.

Pour caractériser de façon unique cette fonction périodique, on sera amené à considérer que les perturbations sont assez rapides, vis-à-vis de la constante de temps de certains circuits, pour que le flux à travers ces circuits n'ait pas le temps de varier de façon notable et puisse être considéré comme constant.

Le couple c_{ea} est un couple d'amortissement. En cas d'oscillations de petite ou grande amplitude, des courants prennent naissance dans l'inducteur et les amortisseurs, créant un couple proportionnel à la dérivée de δ_e par rapport au temps.

Le mouvement naturel résultant de l'équation (10.51) est alors oscillatoire (présence de δ_e et de sa dérivée seconde) avec un certain amortissement (terme en $\frac{\mathrm{d}\delta_e}{\mathrm{d}t}$ faible mais cependant non négligeable). On va donc rencontrer une pseudo-pulsation d'oscillation privilégiée et on s'intéressera surtout au voisinage de cette pulsation, ce qui correspond en effet à la quasi-totalité des problèmes critiques que l'on peut rencontrer. Dans ce domaine restreint de pulsations, il sera alors plus facile de trouver les expressions simplifiées que nous recherchons.

5.1 Expression simplifiée du couple synchrone c_{es}

5.1.1 *Recherche d'invariants*

En négligeant les résistances r_a et r_e et en supposant que la tension d'excitation e_{vf} ne varie pas, les relations (10.32) à (10.34) s'écrivent, sous forme opérationnelle :

$$\Delta v_d = -\omega\,\Delta\psi_q \tag{10.52}$$

$$\Delta v_q = \omega\,\Delta\psi_d \tag{10.53}$$

$$\omega\,\Delta\psi_d = x_d(p)\,\Delta i_d \tag{10.54}$$

$$\omega\,\Delta\psi_q = x_q(p)\,\Delta i_q\,. \tag{10.55}$$

Pour obtenir un couple synchrone indépendant de la pulsation des oscillations, il faut tenter de remplacer $x_d(p)$ et $x_q(p)$ par des constantes. Nous allons utiliser pour cela l'analyse fréquencielle, appliquée aux expressions (7.14) et (7.15) développant les inverses de $x_d(p)$ et $x_q(p)$. En régime harmonique de pulsation Ω, on peut écrire :

$$\mathbf{y}_d(\mathrm{j}\Omega) = \frac{1}{\mathbf{x}_d(\mathrm{j}\Omega)} = \frac{1}{x_d} + \left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d}\right)\frac{\mathrm{j}\Omega \mathrm{T}'_d}{1 + \mathrm{j}\Omega \mathrm{T}'_d} + \left(\frac{1}{x''_d} - \frac{1}{x'_d}\right)\frac{\mathrm{j}\Omega \mathrm{T}''_d}{1 + \mathrm{j}\Omega \mathrm{T}''_d}$$

$$\mathbf{y}_q(\mathrm{j}\Omega) = \frac{1}{\mathbf{x}_q(\mathrm{j}\Omega)} = \frac{1}{x_q} + \left(\frac{1}{x''_q} - \frac{1}{x_q}\right)\frac{\mathrm{j}\Omega \mathrm{T}''_q}{1 + \mathrm{j}\Omega \mathrm{T}''_q}$$

ou encore :

$$\frac{1}{\mathbf{x}_d(\mathrm{j}\Omega)} = \frac{1}{x_d} + \left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d}\right)\frac{\mathrm{j}\Omega \mathrm{T}'_d + \Omega^2 \mathrm{T}'^2_d}{1 + \Omega^2 \mathrm{T}'^2_d} + \left(\frac{1}{x''_d} - \frac{1}{x'_d}\right)\frac{\mathrm{j}\Omega \mathrm{T}''_d + \Omega^2 \mathrm{T}''^2_d}{1 + \Omega^2 \mathrm{T}''^2_d} \tag{10.56}$$

$$\frac{1}{\mathbf{x}_q(\mathrm{j}\Omega)} = \frac{1}{x_q} + \left(\frac{1}{x''_q} - \frac{1}{x_q}\right)\frac{\mathrm{j}\Omega \mathrm{T}''_q + \Omega^2 \mathrm{T}''^2_q}{1 + \Omega^2 \mathrm{T}''^2_q}\,. \tag{10.57}$$

D'après les remarques précédentes, le couple synchrone est associé à la partie réelle des expressions (10.56) et (10.57) :

a) en cas de perturbations très lentes, correspondant à Ω très faible, $x_d(p)$ et $x_q(p)$ peuvent être confondues avec x_d et x_q respectivement. C'est l'hypothèse *d'invariance synchrone*, qui conduit à l'expression (6.57) du couple électromagnétique. Physiquement, cette hypothèse signifie que les variations sont trop lentes pour que les enroulements du rotor puissent s'opposer aux variations de flux qui leur sont imposées ;

b) en cas de perturbations moyennement rapides, caractérisées par :

$$\frac{1}{\mathrm{T}'_d} < \Omega < \frac{1}{\mathrm{T}''_d} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\mathrm{T}''_q}$$

ce qui correspond, d'après le tableau du chapitre VII, paragraphe 5, à environ

$$2 < \Omega < 20 \text{ rad/s} .$$

(du moins en ce qui concerne les machines synchrones d'une certaine puissance, cas auquel nous nous limiterons) soit des fréquences d'oscillations comprises entre 0,3 et 3 Hz. Dans la partie réelle de (10.56) et (10.57) on peut considérer que $\Omega^2 T_d''^2$ et $\Omega^2 T_q''^2$ sont négligeables devant 1, alors que $\Omega^2 T_d'^2$ est grand devant 1, si bien qu'en ce qui concerne le couple synchrone on peut confondre :

$$\begin{aligned} x_d(p) \quad &\text{avec} \quad x_d' \\ x_q(p) \quad &\text{avec} \quad x_q . \end{aligned}$$

C'est l'hypothèse *d'invariance transitoire.*

Physiquement, cette hypothèse signifie que l'inducteur, de grande constante de temps, conserve son flux au cours de la perturbation, alors que les amortisseurs le laissent varier librement (mais par contre ils contribuent au couple d'amortissement, correspondant à la partie imaginaire de (10.56) et (10.57)) ;

c) enfin, en cas de perturbations très rapides $\left(\Omega > \frac{1}{T_d''} \text{ ou } \frac{1}{T_q''}\right)$ $x_d(p)$ et $x_q(p)$ peuvent être confondus avec x_d'' et x_q'' respectivement. C'est l'hypothèse *d'invariance subtransitoire.* Physiquement cette hypothèse signifie que tous les circuits rotoriques conservent leur flux au cours de la perturbation.

Il se trouve que la fréquence naturelle d'oscillation des machines synchrones raccordées au réseau est souvent voisine de 1 Hz, comme nous le montrerons plus loin sur une application numérique.

Nous allons donc développer l'hypothèse d'invariance transitoire, sachant qu'elle est souvent justifiée pour les oscillations, de petite ou grande amplitude, dont la fréquence est de l'ordre de 1 Hz, avec un éventail relativement large tout de même.

Cette approximation revient à considérer que certains éléments du diagramme vectoriel d'une machine synchrone sont conservés même lors d'un régime transitoire, grâce à la présence d'une quantité invariante qui n'est autre que le flux d'enroulement de l'inducteur.

5.1.2 *Diagramme vectoriel et couple synchrone en hypothèse d'invariance transitoire*

Avec l'approximation ci-dessus, les équations (10.52) à (10.55) s'écrivent, les variables étant maintenant fonctions du temps :

$$\begin{aligned} \Delta v_d &= -\omega \Delta\psi_q \\ \Delta v_q &= \omega \Delta\psi_d \\ \omega \Delta\psi_d &= x_d' \Delta i_d \\ \omega \Delta\psi_q &= x_q \Delta i_q \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \Delta v_d + x_q \Delta i_q &= 0 \\ \Delta v_q - x_d' \Delta i_d &= 0 . \end{aligned}$$

Ces deux relations signifient qu'au cours d'un régime variable les deux quantités $v_d + x_q i_q$ et $v_q - x'_d i_d$ restent invariantes donc égales à leur valeur initiale ; si on observe les équations (10.25) et (10.26) en y faisant $r_a = 0$, on constate que ces valeurs initiales sont respectivement 0 et e'_{q0}, autrement dit on peut écrire, à tout instant du régime transitoire :

$$\begin{cases} v_d + x_q i_q = v_{d0} + x_q i_{q0} = 0 \\ v_q - x'_d i_d = v_{q0} - x'_d i_{d0} = e'_{q0} . \end{cases} \tag{10.58}$$

Complétons ces équations par (10.13) où l'on suppose $r_e = 0$

$$\begin{cases} - v_r \sin \delta_e = v_d - x_e i_q \\ v_r \cos \delta_e = v_q + x_e i_d . \end{cases} \tag{10.59}$$

Sur la figure 10.7 est tracé le diagramme vectoriel correspondant aux équations (10.58) et (10.59) l'instant initial (les indices 0 ont été omis pour simplifier).

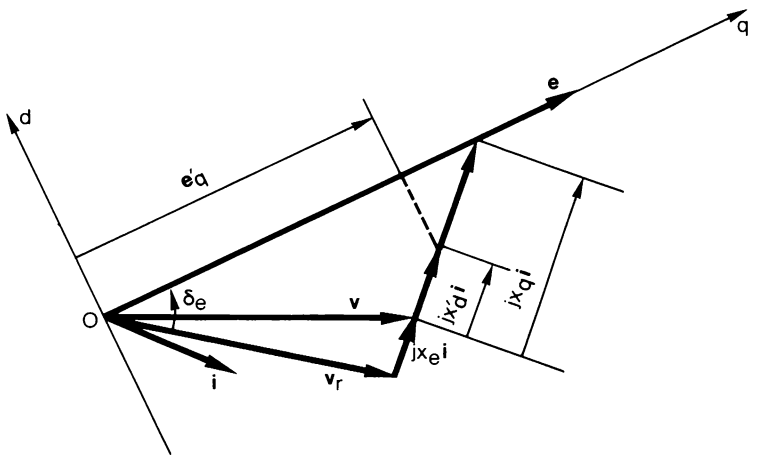


Fig. 10.7. — Régime permanent d'un alternateur raccordé au réseau, en vue de l'étude simplifiée des grandes perturbations.

Au cours du régime transitoire $\mathbf{v}_r$ reste par définition invariable en amplitude et phase, et (10.58) exprime que la f.é.m. transitoire $\mathbf{e}'_q$ reste également invariable et portée par l'axe Oq, lui-même lié au rotor dont la position par rapport à la référence $\mathbf{v}_r$ est caractérisée par l'angle δ_e.

On note qu'évidemment la construction de la figure 10.7 correspond, à la résistance r_a près, à celle de la figure 10.4 et que d'après (10.24) l'invariance de la f.é.m. transitoire e'_q traduit l'invariance du flux ψ_f traversant l'inducteur.

Pour calculer le couple synchrone en fonction de v_r, e'_{q0} et δ_e il suffit alors :

— d'expliciter les flux ψ_d et ψ_q à partir de (10.14) en y faisant $r_a = 0$

$$\begin{cases} v_d = - \psi_q \omega \\ v_q = \psi_d \omega \end{cases} \tag{10.60}$$

— d'extraire ψ_d, ψ_q, i_d, i_q de (10.58) à (10.60) en éliminant v_d et v_q

— de porter dans l'expression du couple (10.18) d'où, en adoptant pour les réactances la notation abrégée du chapitre VII, paragraphe 7.5

$$(10.61) \qquad c_{es}(\delta_e) = \frac{e'_{q0}\, v_r}{x'_{de}} \sin \delta_e + \frac{v_r^2}{2} \sin 2\,\delta_e \left(\frac{1}{x_{qe}} - \frac{1}{x'_{de}} \right).$$

Nous avons donc établi une expression approchée du couple synchrone, valable dans le domaine de fréquences d'oscillation de l'ordre de 1 Hz, fonction de la seule variable δ_e, angle que fait l'axe polaire du rotor avec une référence synchrone liée au réseau, et des tensions v_r et e'_{q0}.

Pour fixer les idées, la courbe représentative de (10.61) a été tracée figure 10.8 avec les valeurs suivantes (en valeurs réduites)

$$e'_{q0} = v_r = 1 \qquad x'_{de} = 0{,}5 \qquad x_{qe} = 1$$

d'où

$$c_{es} = 2 \sin \delta_e - 0{,}5 \sin 2\,\delta_e .$$

A titre de comparaison, nous avons tracé sur le même graphique la courbe statique, correspondant à l'hypothèse d'invariance synchrone. Elle se déduit de (6.57) en remplaçant v par v_r, en ajoutant x_e aux réactances, et en remplaçant δ par δ_e, soit

$$(10.62) \qquad c_{es}(\delta_e) = \frac{e_0\, v_r}{x_{de}} \sin \delta_e + \frac{v_r^2}{2} \sin 2\,\delta_e \left(\frac{1}{x_{qe}} - \frac{1}{x_{de}} \right).$$

On a choisi comme valeurs numériques supplémentaires :

$$x_{de} = 1{,}5 \qquad e_0 = 1{,}5 .$$

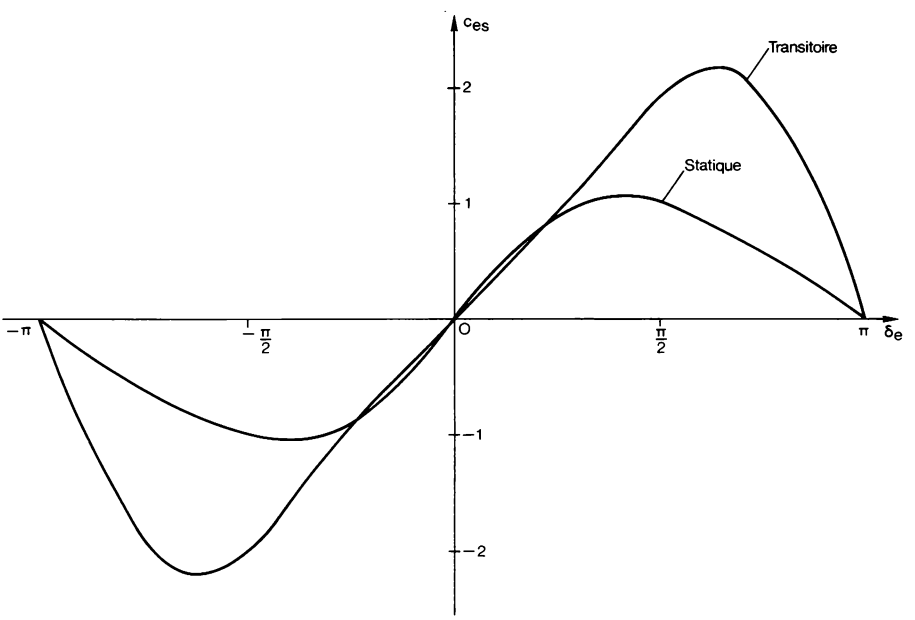


Fig. 10.8. — Courbe du couple en fonction de l'angle, en hypothèse d'invariance transitoire, comparée à la courbe statique, correspondant à l'invariance synchrone.

On constate qu'il n'y a qu'un seul régime initial commun aux deux courbes ce qui signifie simplement qu'à régime initial donné, les quantités δ_{e0}, e_0 et e'_{q0} ne sont pas indépendantes. On constate également que le couple maximal développé aux cours d'oscillations relativement rapides (fréquence de l'ordre de 1 Hz) est plus grand que dans le cas des variations très lentes, et correspond à un angle supérieur à $\pi/2$, du fait que $x'_d < x_q$.

5.2 Evaluation du couple d'amortissement c_{ea}

Comme dans le cas du couple synchrone, il n'est possible d'obtenir qu'une évaluation très approximative du terme $c_{ea}\left(\frac{\mathrm{d}\delta_e}{\mathrm{d}t}\right)$ figurant dans (10.50) ou (10.51). Notre propos est simplement d'obtenir un ordre de grandeur, valable dans la gamme de fréquences d'oscillation intéressante, ($\sim$ 1 Hz), afin de constater qu'en effet (10.51) conduit, pour des oscillations de moyenne amplitude, à un régime oscillatoire amorti.

Pour cela, nous nous reportons à l'étude des oscillations de faible amplitude, et utilisons le fait que dans (10.37) le terme d'amortissement correspond à la partie imaginaire.

Il est possible d'expliciter cette expression, en s'aidant du développement du type (10.56) et (10.57) mais en y incluant x_e, ce qui donne, avec les notations du chapitre VII, paragraphe 7.5 :

$$
(10.63)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\Delta \mathbf{c}_e}{\Delta \boldsymbol{\delta}_e} = {} & \frac{e_0\, v_r \cos \delta_{e0}}{x_{de}} + v_r^2 \cos^2 \delta_{e0}^2 \left[\frac{1}{x_{qe}} + \left(\frac{1}{x''_{qe}} - \frac{1}{x_{qe}}\right)\frac{\mathrm{j}\Omega \mathrm{T}''_{qe} + \Omega^2 \mathrm{T}''^2_{qe}}{1 + \Omega^2 \mathrm{T}''^2_{qe}} - \frac{1}{x_{de}}\right] + \\
& + v_r^2 \sin^2 \delta_{e0} \left[\frac{1}{x_{de}} + \left(\frac{1}{x'_{de}} - \frac{1}{x_{de}}\right)\frac{\mathrm{j}\Omega \mathrm{T}'_{de} + \Omega^2 \mathrm{T}'^2_{de}}{1 + \Omega^2 \mathrm{T}'^2_{de}}\right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{x''_{de}} - \frac{1}{x'_{de}}\right)\frac{\mathrm{j}\Omega \mathrm{T}''_{de} + \Omega^2 \mathrm{T}''^2_{de}}{1 + \Omega^2 \mathrm{T}''^2_{de}} - \frac{1}{x_{qe}}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

On voit bien que la partie imaginaire de cette expression dépend de l'angle initial et de la pulsation des oscillations.

Limitons-nous alors aux conditions correspondant à l'invariance transitoire, (fréquence $\sim$ 1 Hz), c'est-à-dire telles que $\Omega^2 \mathrm{T}''^2_{qe}$ et $\Omega^2 \mathrm{T}''^2_{de}$ soient négligeables devant l'unité, et que $\Omega^2 \mathrm{T}'^2_{de}$ soit grand devant l'unité.

On peut écrire dans ces conditions :

$$
(10.64)\quad \mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\frac{\Delta \mathbf{c}_e}{\Delta \boldsymbol{\delta}_e}\right\} \simeq \frac{e_0\, v_r \cos \delta_{e0}}{x_{de}} + v_r^2 \cos^2 \delta_{e0}\left[\frac{1}{x_{qe}} - \frac{1}{x_{de}}\right] + \\
+ v_r^2 \sin^2 \delta_{e0}\left[\frac{1}{x'_{de}} - \frac{1}{x_{qe}}\right].
$$

On retrouve la dérivée en δ_{e0} de (10.62). Il faut pour cela utiliser le fait qu'au régime initial :

$$v_r \cos \delta_{e0} = e_0\, x_{de}\, i_{d0} = e'_{q0} + x'_{de}\, i_{d0}\,.$$

Dans les mêmes conditions on peut écrire :

$$(10.65)\quad \begin{cases} \mathrm{j}\tilde{\jmath}\mathrm{m}\left\{\dfrac{\Delta \mathbf{c}_e}{\Delta \boldsymbol{\delta}_e}\right\} \simeq v_r^2 \cos^2 \delta_{e0}\left(\dfrac{1}{x''_{qe}} - \dfrac{1}{x_{qe}}\right)\mathrm{j}\Omega \mathrm{T}''_{qe} + \cdots \\ \qquad \cdots + v_r^2 \sin^2 \delta_{e0}\left[\left(\dfrac{1}{x'_{de}} - \dfrac{1}{x_{de}}\right)\dfrac{\mathrm{j}\Omega}{\Omega^2 \mathrm{T}'_{de}} + \left(\dfrac{1}{x''_{de}} - \dfrac{1}{x'_{de}}\right)\mathrm{j}\Omega \mathrm{T}''_{de}\right]. \end{cases}$$

Le coefficient $\mathrm{j}\Omega$ caractérise la dépendance entre le couple d'amortissement et la dérivée de l'angle. Même dans cette gamme de fréquence cette dépendance n'est pas une proportionnalité, à cause d'un terme en Ω^2 au dénominateur, dû à la présence de l'inducteur.

Cependant, au voisinage de 1 Hz, il se trouve que les coefficients de $v_r^2 \cos^2 \delta_{e0}$ et de $v_r^2 \sin^2 \delta_{e0}$ dans (10.65) sont du même ordre de grandeur. Compte tenu en outre de ce que $x''_{qe} \ll x_{qe}$, on peut estimer la loi $c_{ea}\left(\dfrac{\mathrm{d}\delta_e}{\mathrm{d}t}\right)$, au voisinage de 1 Hz, par une loi de proportionnalité :

$$(10.66)\qquad c_{ea} = k_a \frac{\mathrm{d}\delta_e}{\mathrm{d}t}$$

avec :

$$(10.67)\qquad k_a \sim \frac{v_r^2 \mathrm{T}''_{qe}}{x''_{qe}}.$$

D'après (10.65) l'approximation donnée par cette loi est évidemment meilleure lorsque l'angle initial δ_{e0} est faible.

5.3 Expression approchée de la loi du mouvement ; application aux petites oscillations

Reportant (10.61) et (10.66) dans (10.51) il vient, pour le modèle simplifié d'étude des perturbations :

$$(10.68)\quad c_m = \frac{e'_{q0}\, v_r}{x'_{de}} \sin \delta_e + \frac{v_r^2}{2} \sin 2\, \delta_e\left(\frac{1}{x_{qe}} - \frac{1}{x'_{de}}\right) + k_a \frac{\mathrm{d}\delta_e}{\mathrm{d}t} + \frac{2\,\mathrm{H}}{\omega}\frac{\mathrm{d}^2\delta_e}{\mathrm{d}t^2}.$$

Pour l'étude des petites perturbations, à partir d'un régime initial caractérisé par l'angle δ_{e0}, il suffit de différentier l'équation (10.68). Nous supposons que les conditions d'application de l'approximation (10.67) sont remplies. Il vient alors :

$$(10.69)\quad \begin{cases} \Delta c_m = \left[\dfrac{e'_{q0}\, v_r}{x'_{de}} \cos \delta_{e0} + v_r^2 \cos 2\, \delta_{e0}\left(\dfrac{1}{x_{qe}} - \dfrac{1}{x'_{de}}\right)\right]\Delta\delta_e + \cdots \\ \qquad \cdots + \dfrac{v_r^2 \mathrm{T}''_{qe}}{x''_{qe}}\dfrac{\mathrm{d}\Delta\delta_e}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2\,\mathrm{H}}{\omega}\dfrac{\mathrm{d}^2\Delta\delta_e}{\mathrm{d}t^2}. \end{cases}$$

Les coefficients intervenant dans cette équation étant du même ordre de grandeur pour les machines synchrones de puissances moyennes et élevées, dans les

conditions usuelles de fonctionnement et de raccordement au réseau, nous allons adopter des valeurs moyennes pour ces coefficients afin d'obtenir un ordre de grandeur de la pseudo-pulsation des oscillations et du coefficient d'amortissement, soit par exemple :

$$e'_{q0} = v_r = 1 \qquad x'_{de} = 0{,}5$$
$$\delta_{e0} = 45^o \qquad \cos \delta_{e0} = 0{,}7 \qquad \cos 2\,\delta_{e0} = 0$$
$$T''_{qe} = 0{,}04 \text{ s} \qquad x''_{qe} = 0{,}4$$
$$H = 5 \text{ s} \qquad \omega = 314 \text{ rad/s}$$

ce qui donne, en portant dans l'équation (10.69)

$$\Delta c_m = 1{,}4\,\Delta\delta_e + 0{,}1\,\frac{d\Delta\delta_e}{dt} + 0{,}03\,\frac{d^2\Delta\delta_e}{dt^2}.$$

L'équation caractéristique :

$$0{,}03\,p^2 + 0{,}1\,p + 1{,}4 = 0$$

a dans ce cas pour racines :

$$p \simeq -1{,}7 \pm j\,6{,}6\,.$$

Nous pouvons donc énoncer les conclusions suivantes, présentant une assez grande généralité dans le cas de machines synchrones connectées à un réseau puissant :

— le régime libre est oscillatoire amorti : après toute perturbation de faible amplitude, la machine retourne à son état d'équilibre par des oscillations amorties de l'angle électrique ;

— la pseudo-pulsation des oscillations à une valeur de l'ordre de 6,6 rad/s, ou encore la fréquence des oscillations est de l'ordre de 1 Hz, ce qui justifie *a posteriori* l'hypothèse d'invariance transitoire et les approximations faites lors de l'estimation du coefficient d'amortissement.

Nous pouvons présumer que les oscillations de grande amplitude s'effectuent également avec une fréquence propre de l'ordre de grandeur de 1 Hz. En conséquence, le choix de l'expression (10.61) de $c_{es}(\delta_e)$ basée sur l'hypothèse adaptée aux fréquences de l'ordre de 1 Hz est ainsi justifié *a posteriori*.

Par ailleurs, le coefficient d'amortissement présente la double caractéristique suivante : il est assez élevé pour que les oscillations aléatoires de la machine s'amortissent rapidement ; il est cependant assez faible pour que, dans l'étude des premiers instants (les plus critiques) suivant une perturbation de grande amplitude, on puisse le négliger, puisque les régimes sont nettement oscillatoires, bien qu'amortis.

Pour conclure dans le cas des oscillations de faible amplitude :

— Une expression approchée de la période des oscillations s'obtient en consi-

dérant seulement les termes en $\Delta\delta_e$ et $\frac{d^2\Delta\delta_e}{dt^2}$ dans (10.69) et en y négligeant le terme en cos 2 δ_{e0} soit :

$$T \simeq 2\pi \sqrt{\frac{2 H x'_{de}}{\omega e'_{q0} v_r \cos \delta_{e0}}} \tag{10.70}$$

montrant que la période des oscillations propres varie sensiblement comme la racine carrée de la constante d'énergie cinétique et de la réactance transitoire, réseau inclus.

— Lorsque le couple mécanique (moteur ou résistant) présente, superposée à sa valeur moyenne, une composante alternative (exemple : alternateur entraîné par une machine à piston), il faut éviter que parmi les harmoniques de ce couple alternatif superposé il s'en trouve un dont la fréquence soit voisine de la fréquence propre de résonance de la machine synchrone ; cette circonstance concerne particulièrement les fréquences voisines de 1 Hz.

5.4 Oscillations de grande amplitude. Stabilité transitoire

Le problème peut se schématiser de la façon suivante : la machine synchrone est, dans un régime permanent de marche synchrone, raccordée à une source de tension d'amplitude et de fréquence invariables par l'intermédiaire d'une réactance. Une perturbation brusque, dont nous donnerons deux exemples, étant supposée appliquée à un instant donné, l'équilibre entre le couple moteur et le couple résistant n'est plus respecté, et l'angle δ_e commence à varier, obéissant à l'équation différentielle (10.68). Ce régime est oscillatoire, mais si l'angle δ_e dépasse une certaine valeur, le synchronisme est perdu. Cette possibilité résulte de la loi périodique qui caractérise le couple de rappel $c_{es}(\delta_e)$ (10.61).

Dans ce régime variable, le couple d'amortissement joue toujours un rôle favorable, puisqu'il s'oppose aux variations de δ_e. Par ailleurs, nous avons vu que ce couple a une amplitude assez faible pour ne pas ôter au mouvement son caractère nettement oscillatoire. Nous allons montrer comment le problème peut être résolu de façon très simple en négligeant l'amortissement.

Les conclusions obtenues par cette approche simplifiée seront donc pessimistes, ce qui revient à se ménager une marge de sécurité dans l'évaluation des limites de stabilité.

L'équation simplifiée du mouvement s'écrit donc ici :

$$c_m = c_{es}(\delta_e) + \frac{2 H}{\omega} \frac{d^2\delta_e}{dt^2} \tag{10.71}$$

avec $c_{es}(\delta_e)$ donné par (10.61).

5.4.1 *Premier exemple de perturbation : augmentation brusque du couple mécanique*

Nous supposons que, pour une raison quelconque (ouverture du vannage d'admission de la turbine dans le cas d'un alternateur, augmentation du couple

résistant dans le cas d'un moteur), le couple sur l'arbre de la machine augmente brusquement. Nous prenons comme exemple le cas d'un alternateur, mais le cas d'un moteur se traiterait de façon analogue.

De la même manière qu'au paragraphe 5.1.2, l'étude du régime initial conduit à la connaissance de la loi $c_{es}(\delta_e)$, et le régime de départ est caractérisé sur un diagramme (c, δ_e) (fig. 10.9) par l'intersection de l'horizontale c_{m0} avec la courbe $c_{es}(\delta_e)$ d'où l'angle initial δ_{e0} sur la partie stable de la caractéristique.

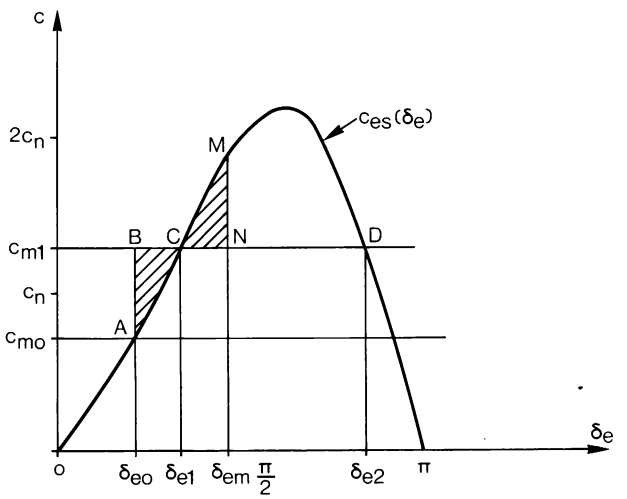


Fig. 10.9. — Perturbation correspondant à une variation brusque de couple moteur.

Le régime initial est donc caractérisé par l'égalité :

$$c_{m0} = c_{es}(\delta_{e0}) .$$

Si à l'instant initial le couple moteur prend brusquement la valeur $c_{m1} > c_{m0}$, l'angle δ_e ne pouvant varier instantanément, il y a excès du couple moteur c_{m1} sur le couple résistant, qui vaut toujours $c_{es}(\delta_{e0})$. Cet excès, caractérisé par le segment $\overline{AB}$, est justement d'après (10.71) égal au couple d'inertie $\frac{2H}{\omega}\frac{d^2\delta_e}{dt^2}$. La machine tend à accélérer, la dérivée $\frac{d\delta_e}{dt}$ commence à croître à partir de la valeur 0. L'angle δ_e augmentant, on voit sur le graphique que l'écart entre les courbes c_{m1} (horizontale) du couple moteur et $c_{es}(\delta_e)$ du couple résistant diminue et tend à s'annuler au point C correspondant à l'angle δ_{e1}. En C, les deux couples sont égaux, donc d'après (10.71) l'accélération est nulle : $\frac{d\delta_e}{dt}$ passe alors par un maximum positif, et δ_e continue à croître. Mais alors le couple résistant $c_{es}(\delta_e)$ devient supérieur à c_{m1}, l'accélération devient négative, $\frac{d\delta_e}{dt}$ commence à décroître.

On dit que la « stabilité transitoire » est conservée à la suite de la perturbation si la suite du mouvement conduit à un retour à un régime de fonctionnement synchrone.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la dérivée $\frac{d\delta_e}{dt}$ devienne nulle avant que l'angle δ_e ait atteint l'angle δ_{e2} correspondant au point D, deuxième intersection de $c_{es}(\delta_e)$ et de c_{m1}. Si par exemple δ_e atteint son maximum en $\delta_{em} < \delta_{e2}$, l'accélération étant toujours négative d'après (10.71) $\frac{d\delta_e}{dt}$ continue à décroître donc devient négative, δ_e commence à décroître ; le mouvement est pendulaire, le couple électrique $c_{es}(\delta_e)$ passant par les valeurs situées sur l'arc ACM, et le mouvement s'amortit grâce au couple d'amortissement que nous avons négligé, jusqu'au point final C correspondant à l'angle d'équilibre δ_{e1}.

Par contre, si $\frac{d\delta_e}{dt}$ est encore positive (bien que décroissante) lorsqu'on atteint le point D, celui-ci est dépassé et l'accélération redevient positive : $\frac{d\delta_e}{dt}$ ne peut plus s'annuler et δ_e croît indéfiniment : le synchronisme est perdu.

La limite de stabilité transitoire correspond au cas où, par suite de l'augmentation brusque du couple à la valeur c_{m1}, δ_e atteint son maximum en δ_{e2}.

Nous allons rechercher l'intégrale première du mouvement, qui s'exprime par une loi caractéristique appelée *loi des aires*, et conduit à une expression mathématique du critère de stabilité.

L'équation du mouvement (10.71) s'écrit ici :

$$\frac{d^2\delta_e}{dt^2} = \frac{\omega}{2H}[c_{m1} - c_{es}(\delta_e)] . \tag{10.72}$$

Multipliant les deux membres par $\frac{d\delta_e}{dt}$, on peut intégrer entre l'instant 0, où δ_e a la valeur δ_{e0}, et un instant t quelconque, correspondant à la valeur δ_e :

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\delta_e}{dt}\right)^2\right]_0^t = \frac{\omega}{2H}\int_{\delta_{e0}}^{\delta_e}[c_{m1} - c_{es}(\alpha)]\,d\alpha . \tag{10.73}$$

Au deuxième membre figure l'aire algébrique comprise entre les courbes $c_{m1} = \text{Cte}$ et $c_{es}(\delta_e)$, et les verticales δ_{e0} et δ_e.

L'abscisse maximale δ_{em} est atteinte au temps t_m tel que $\frac{d\delta_e}{dt}$ soit à nouveau nulle, ce qui correspond à l'annulation du premier membre de (10.73), $\frac{d\delta_e}{dt}$ étant également nulle au temps $t = 0$. L'angle δ_{em} atteint au bout de la première oscillation est donc donné par l'équation :

$$\frac{\omega}{2H}\int_{\delta_{e0}}^{\delta_{em}}[c_{m1} - c_{es}(\delta_e)]\,d\delta_e = 0 . \tag{10.74}$$

L'angle δ_{em} est donc tel que l'aire algébrique CBACNMC soit nulle, donc que les aires arithmétiques ABC et CNM soient égales (aires hachurées sur la fig. 10.9).

Cette propriété de l'angle maximal atteint est pour cette raison appelée *loi des aires*. Elle est tout à fait générale, mais son expression mathématique dépend de la perturbation considérée.

La stabilité transitoire est maintenue si δ_{em} est au plus égal à δ_{e2}. La limite peut être caractérisée par la valeur maximale c_{m1} du couple moteur telle que dans (10.74) δ_{em} soit égal à δ_{e2}. Le couple limite c_{m1}, lié à l'angle limite δ_{e2} par l'égalité $c_{m1} = c_{es}(\delta_{e2})$, est alors donné par l'équation :

$$\frac{\omega}{2H}\int_{\delta_{e0}}^{\delta_{e2}} [c_{m1} - c_{es}(\delta_e)]\, d\delta_e = 0 . \tag{10.75}$$

Graphiquement, on est amené à déterminer l'horizontale c_{m1}(lim) qui entraîne l'égalité des aires arithmétiques ABC et CNDMC (fig. 10.10). Naturellement c_{m1}(lim) dépend de δ_{e0}, donc de c_{m0}.

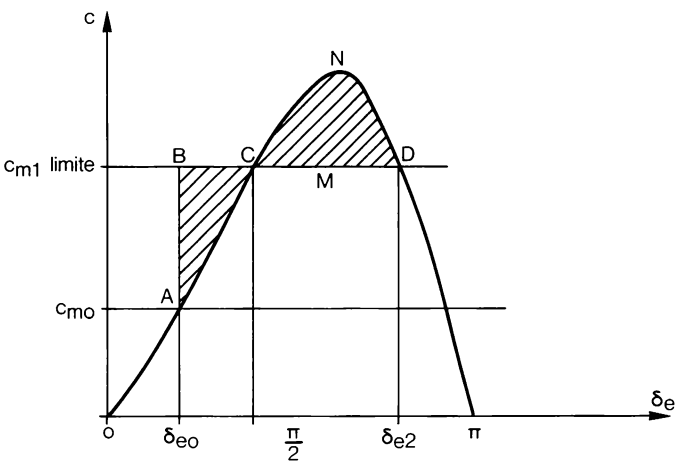


Fig. 10.10. — Limite de stabilité en cas de variation brusque de couple moteur.

5.4.2 *Deuxième exemple de perturbation : augmentation brusque de l'impédance de liaison de la machine au réseau*

Supposons que la machine soit connectée au réseau par l'intermédiaire d'un transformateur et de deux lignes en parallèle, et que l'une de ces deux lignes déclenche (fig. 10.11).

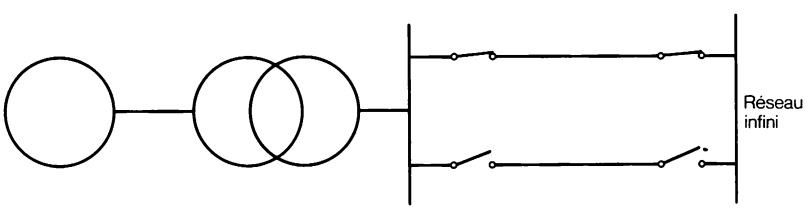


Fig. 10.11. — Schéma de réseau pour illustrer le déclenchement d'une ligne.

L'état initial (toujours dans le cas d'un alternateur) est caractérisé de la même manière qu'en 5.4.1, par l'intersection de l'horizontale c_{m0} avec la courbe $c_{es1}(\delta_e)$ déterminée à partir des conditions électriques initiales, la réactance de liaison x_e intervenant dans (10.61) ayant la valeur x_{e1} correspondant à l'ensemble du transformateur et des deux lignes en parallèle (fig. 10.12).

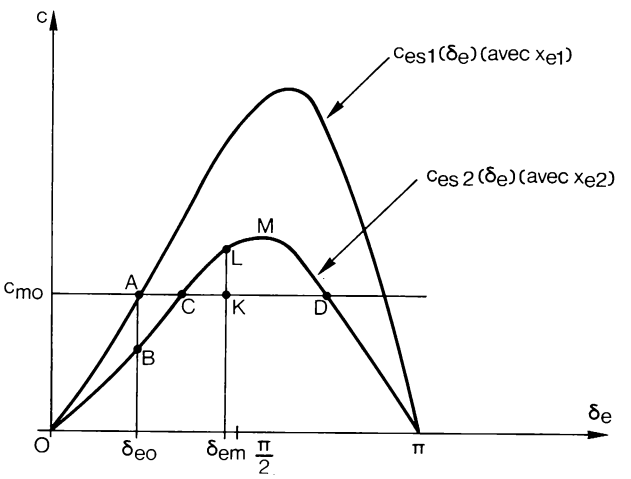


Fig. 10.12. — Perturbation correspondant au déclenchement d'une des deux lignes en parallèle.

Si une des lignes déclenche, l'impédance x_e prend la valeur $x_{e2} > x_{e1}$ correspondant à l'ensemble du transformateur et d'une ligne, et la loi $c_{es}(\delta_e)$ devient $c_{es2}(\delta_e)$ obtenue à partir de (10.61) par la substitution de x_{e2} à x_{e1}, en conservant les autres quantités et notamment e'_{q0}. On a donc constamment $c_{es2}(\delta_e) < c_{es1}(\delta_e)$.

La loi du mouvement après déclenchement est donnée par :

$$c_{m0} = \frac{2\,H}{\omega}\frac{d^2\delta_e}{dt^2} + c_{es2}(\delta_e)\,. \tag{10.76}$$

Le raisonnement, du même type qu'au paragraphe précédent, est le suivant : A l'instant initial, l'angle, de valeur δ_{e0}, ne pouvant varier instantanément, il y a excès du couple moteur c_{m0} sur le couple résistant $c_{es2}(\delta_{e0})$, cet excès étant caractérisé par le segment BA, proportionnel d'après (10.76) à l'accélération angulaire, et à tout instant ultérieur l'accélération sera mesurée par l'écart entre c_{m0} et la courbe $c_{es2}(\delta_{e0})$.

La conclusion est la même que précédemment : le régime sera pendulaire amorti, avec retour au régime permanent correspondant à l'équilibre $c_{m0} = c_{es2}(\delta_e)$ (point C), à condition que l'aire CMDC soit au moins égale à l'aire BAC.

Dans le cas de la figure 10.12 l'angle maximal atteint au cours de la première oscillation est δ_{em} tel que les aires ABC et CKL soient arithmétiquement égales (loi des aires) ; le régime est stable, puisque l'aire ABC, égale à l'aire CKL, est inférieure à l'aire CMDC.

Cette condition de stabilité permet de déterminer graphiquement la valeur maximale du couple initial c_{m0} pour laquelle on peut supporter le déclenchement d'une des deux lignes sans risquer de perdre le synchronisme.

CHAPITRE XI

MACHINES ASYNCHRONES MISE EN ÉQUATIONS ; RÉGIME PERMANENT ASYNCHRONE

Note préliminaire

Les machines dont nous allons étudier les propriétés devraient en fait être appelées « à induction », cas particulier des machines « asynchrones ». Nous conserverons cependant ce dernier terme, d'un usage plus répandu.

1 DESCRIPTION, HYPOTHÈSES SIMPLIFICATRICES, CONVENTIONS DE SIGNES

1.1 Description

La machine asynchrone dont nous allons étudier la mise en équations correspond à la structure de principe représentée figure 11.1 dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, en hypothèse bipolaire.

Les armatures magnétiques du stator et du rotor sont toutes deux cylindriques, donc séparées par un entrefer constant, et munies chacune d'un enroulement triphasé ; nous retrouverons alors, pour l'un et l'autre de ces enroulements, les propriétés et transformations étudiées au chapitre V à propos de l'induit des machines synchrones.

Notons que la mise en équations peut facilement s'étendre au cas d'un nombre quelconque de phases au stator et au rotor, ainsi qu'au cas des rotors « à cage d'écureuil », comme nous le montrerons au paragraphe 6.

Les trois enroulements de phase du stator *as*, *bs*, *cs* sont représentés schématiquement au droit de leurs axes magnétiques respectifs, ainsi que les trois enroulements du rotor *ar*, *br*, *cr*.

Comme pour la machine synchrone on a intérêt à transformer les équations par l'utilisation de deux axes perpendiculaires O*d* et O*q*, mais l'isotropie du stator et du rotor fait que l'on n'a aucune raison de fixer *a priori* la position ni le mouvement de l'axe O*d*.

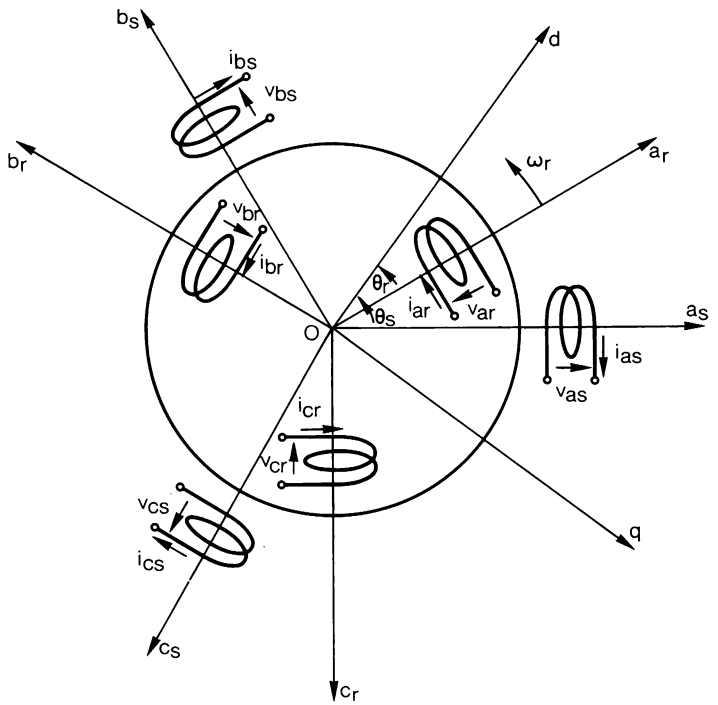


Fig. 11.1. — Représentation schématique d'une machine asynchrone triphasée au stator et au rotor.

On aura donc les définitions angulaires suivantes, dans le sens trigonométrique :

$$
(11.1)\qquad
\begin{cases}
(Oas, Od) = \theta_s \\
(Obs, Od) = \theta_s - \dfrac{2\pi}{3} \\
(Ocs, Od) = \theta_s - \dfrac{4\pi}{3} \\
(Oar, Od) = \theta_r \\
(Obr, Od) = \theta_r - \dfrac{2\pi}{3} \\
(Ocr, Od) = \theta_r - \dfrac{4\pi}{3} \\
(Oas, Oar) = \theta_s - \theta_r = \theta \\
(Oq, Od) = \dfrac{\pi}{2}\,.
\end{cases}
$$

Notons que θ caractérise la position angulaire du rotor par rapport au stator, d'où la vitesse angulaire (en bipolaire) :

$$
(11.2)\qquad \boxed{\omega_r = \frac{d\theta_s}{dt} - \frac{d\theta_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}}\,.
$$

1.2 Hypothèses simplificatrices

Elles sont tout à fait homologues à celles faites à propos de la machine synchrone (chap. V, § 1.2) :

— On suppose que le circuit magnétique est non saturé et parfaitement feuilleté au stator et au rotor (donc que seuls les enroulements sont parcourus par des courants), et que la densité de courant peut être considérée comme uniforme dans la section des conducteurs élémentaires.

— On ne considère que le premier harmonique d'espace de la distribution de force magnétomotrice créée par chaque phase du stator et du rotor, d'où il résulte, du fait que l'entrefer est constant, que les inductances propres sont des constantes et que les inductances mutuelles entre deux enroulements sont fonction sinusoïdale de l'angle entre leurs axes magnétiques.

1.3 Conventions de signes

Par raison d'homogénéité avec les autres machines, et bien que les machines asynchrones soient surtout utilisées comme moteurs, on adoptera les mêmes conventions que pour les machines synchrones (chap. V, § 1.3) :

— Un courant positif crée à travers son propre enroulement un flux positif.
— Une f.é.m. positive fait circuler un courant positif.
— Le stator est considéré comme générateur, le rotor comme récepteur.
— Les angles et les vitesses de rotation sont comptés positivement dans le sens trigonométrique.

2 ÉQUATIONS ÉLECTRIQUES ET MAGNÉTIQUES

Au cours du présent chapitre et du suivant nous utiliserons les unités physiques. Quelques indications seront données en fin de chapitre sur les valeurs réduites.

2.1 Equations électriques

Compte tenu des conventions de signes ci-dessus, les six enroulements de la figure 11.1 obéissent aux équations :

$$\text{(11.3)} \qquad \begin{cases} v_{as} = -\dfrac{d\psi_{as}}{dt} - R_s\, i_{as} \\ v_{bs} = -\dfrac{d\psi_{bs}}{dt} - R_s\, i_{bs} \\ v_{cs} = -\dfrac{d\psi_{cs}}{dt} - R_s\, i_{cs} \end{cases}$$

$$\text{(11.4)} \qquad \begin{cases} v_{ar} = \dfrac{d\psi_{ar}}{dt} + R_r\, i_{ar} \\ v_{br} = \dfrac{d\psi_{br}}{dt} + R_r\, i_{br} \\ v_{cr} = \dfrac{d\psi_{cr}}{dt} + R_r\, i_{cr} \end{cases}$$

en appelant :

R_s = résistance d'une phase du stator
R_r = résistance d'une phase du rotor
ψ_k = flux d'enroulement traversant l'enroulement k.

2.2 Relations entre flux et courants

Les hypothèses du paragraphe 1.2 entraînent les relations suivantes entre flux et courants, en appelant :

L_{as} = inductance propre d'une phase du stator
M_{as} = inductance mutuelle entre deux phases du stator
L_{ar} = inductance propre d'une phase du rotor
M_{ar} = inductance mutuelle entre deux phases du rotor
M_{rs} = maximum de l'inductance mutuelle entre une phase du stator et une phase du rotor (atteint lorsque leurs axes magnétiques sont alignés).

(11.5)

$$\begin{vmatrix} \psi_{as} \\ \psi_{bs} \\ \psi_{cs} \\ \psi_{ar} \\ \psi_{br} \\ \psi_{cr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{as} & M_{as} & M_{as} & M_{rs}\cos\theta & M_{rs}\cos\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right) & M_{rs}\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{as} & L_{as} & M_{as} & M_{rs}\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & M_{rs}\cos\theta & M_{rs}\cos\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right) \\ M_{as} & M_{as} & L_{as} & M_{rs}\cos\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right) & M_{rs}\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & M_{rs}\cos\theta \\ M_{rs}\cos\theta & M_{rs}\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & M_{rs}\cos\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right) & L_{ar} & M_{ar} & M_{ar} \\ M_{rs}\cos\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right) & M_{rs}\cos\theta & M_{rs}\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & M_{ar} & L_{ar} & M_{ar} \\ M_{rs}\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & M_{rs}\cos\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right) & M_{rs}\cos\theta & M_{ar} & M_{ar} & L_{ar} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{vmatrix}$$

2.3 Transformation de PARK ; équations selon les axes *d* et *q*

La transformation de PARK consiste à appliquer aux courants, tensions et flux, un changement de variables faisant intervenir l'angle entre l'axe des enroulements et les axes d et q. D'après la figure 11.1 c'est l'angle θ_s qui doit intervenir pour les grandeurs du stator et l'angle θ_r pour les grandeurs du rotor.

On appliquera donc le changement de variables défini par les relations (5.18) à (5.25) :

— aux grandeurs stator, en ajoutant l'indice s à toutes les grandeurs, y compris l'angle θ ;

— aux grandeurs rotor, en ajoutant l'indice r à toutes les grandeurs, y compris l'angle θ.

Les équations (11.3), (11.4) et (11.5) donnent alors lieu au système suivant, obtenu par le même procédé que pour les machines synchrones :

(11.6)
$$\boxed{\begin{aligned} v_{ds} &= -\frac{d\psi_{ds}}{dt} - \psi_{qs}\frac{d\theta_s}{dt} - R_s\, i_{ds} \\ v_{qs} &= -\frac{d\psi_{qs}}{dt} + \psi_{ds}\frac{d\theta_s}{dt} - R_s\, i_{qs} \end{aligned}}$$

(11.7)
$$\boxed{\begin{aligned} v_{dr} &= \frac{d\psi_{dr}}{dt} + \psi_{qr}\frac{d\theta_r}{dt} + R_r\, i_{dr} \\ v_{qr} &= \frac{d\psi_{qr}}{dt} - \psi_{dr}\frac{d\theta_r}{dt} + R_r\, i_{qr} \end{aligned}}$$

(11.8)
$$\boxed{\begin{vmatrix} \psi_{ds} \\ \psi_{dr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_{ds} \\ i_{dr} \end{vmatrix}}$$

(11.9)
$$\boxed{\begin{vmatrix} \psi_{qs} \\ \psi_{qr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_{qs} \\ i_{qr} \end{vmatrix}}$$

en posant :

$L_s = L_{as} - M_{as}$ = inductance propre cyclique du stator
$L_r = L_{ar} - M_{ar}$ = inductance propre cyclique du rotor
$M = \frac{3}{2} M_{rs}$ = inductance mutuelle cyclique entre stator et rotor.

L'isotropie de la machine asynchrone fait que les systèmes (11.8) et (11.9) ont mêmes coefficients.

Le changement de variables peut être interprété comme la substitution, aux enroulements réels, d'enroulements fictifs *ds*, *qs*, *dr*, *qr* dont les axes magnétiques sont liés aux axes *d* et *q* conformément à la figure 11.2, mais dont les conducteurs restent liés aux armatures qui les supportent.

Dans les équations (11.6) à (11.9) on n'a pas fait figurer les composantes d'indice *o*, qui n'interviennent que dans des cas très rares. Indiquons pour mémoire les équations correspondantes :

(11.10)
$$\begin{cases} v_{os} = -\dfrac{d\psi_{os}}{dt} - R_s\, i_{os} = -L_{os}\dfrac{di_{os}}{dt} - R_s\, i_{os} \\ v_{or} = \dfrac{d\psi_{or}}{dt} + R_r\, i_{or} = L_{or}\dfrac{di_{or}}{dt} + R_r\, i_{or} \end{cases}$$

avec

$$L_{os} = L_{as} + 2\,M_{as} \qquad L_{or} = L_{ar} + 2\,M_{ar}\,.$$

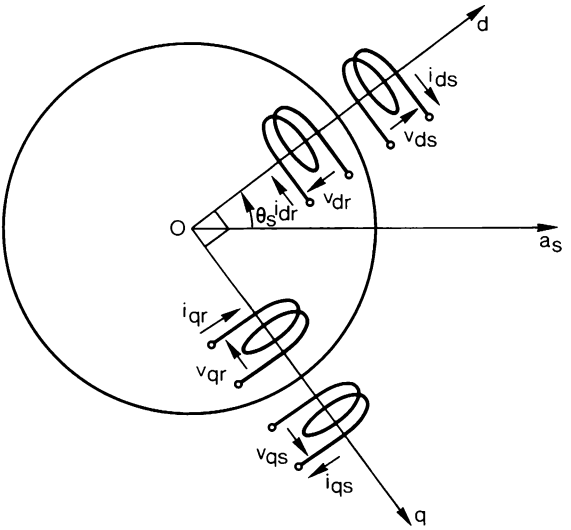


Fig. 11.2. — Interprétation physique de la transformation de PARK pour une machine asynchrone.

3 PUISSANCE ET COUPLE

Dans le cas le plus fréquent une machine asynchrone fonctionne en moteur, elle est alimentée au stator par une source triphasée, et l'enroulement du rotor est fermé en court-circuit.

Cependant dans ce paragraphe nous allons nous placer dans le cas général où les tensions rotoriques aussi bien que statoriques ne sont pas nulles ; les relations qui vont suivre sont indépendantes du choix de l'angle θ_s définissant les axes d et q.

Le stator étant considéré comme générateur, et le rotor comme récepteur, la puissance électrique fournie au milieu extérieur vaut :

(11.11) $$P_e = v_{as}\, i_{as} + v_{bs}\, i_{bs} + v_{cs}\, i_{cs} - v_{as}\, i_{ar} - v_{br}\, i_{br} - v_{cr}\, i_{cr}$$

qui s'écrit, en appliquant la transformation de PARK

(11.12) $$\boxed{P_e = \frac{3}{2}(v_{ds}\, i_{ds} + v_{qs}\, i_{qs} + 2\, v_{os}\, i_{os} - v_{dr}\, i_{dr} - v_{qr}\, i_{qr} - 2\, v_{or}\, i_{or})}$$

soit, en utilisant (11.6) à (11.10), et en rangeant les termes par familles :

(11.13)
$$\begin{cases} P_e = \dfrac{3}{2}\left[- i_{ds}\dfrac{d\psi_{ds}}{dt} - i_{qs}\dfrac{d\psi_{qs}}{dt} - 2\, i_{os}\dfrac{d\psi_{os}}{dt} - \right. \\ \left. - i_{dr}\dfrac{d\psi_{dr}}{dt} - i_{qr}\dfrac{d\psi_{qr}}{dt} - 2\, i_{or}\dfrac{d\psi_{or}}{dt}\right] \\ + \dfrac{3}{2}\left[(\psi_{ds}\, i_{qs} - \psi_{qs}\, i_{ds})\dfrac{d\theta_s}{dt} + (\psi_{dr}\, i_{qr} - \psi_{qr}\, i_{dr})\dfrac{d\theta_r}{dt}\right] \\ + \dfrac{3}{2}\left[R_s(i_{ds}^2 + i_{qs}^2 + 2\, i_{os}^2) + R_r(i_{dr}^2 + i_{qr}^2 + 2\, i_{or}^2)\right]. \end{cases}$$

Le premier crochet représente la variation par unité de temps de l'énergie magnétique emmagasinée.

Le deuxième crochet représente la puissance mécanique transformée en puissance électrique à l'intérieur de la machine. En utilisant (11.8) et (11.9) on peut constater que dans ce crochet, la deuxième parenthèse est égale et de signe contraire à la première ; la puissance électromécanique s'écrit donc, en tenant compte de (11.2) :

$$(\psi_{ds}\, i_{qs} - \psi_{qs}\, i_{ds})\left(\frac{d\theta_s}{dt} - \frac{d\theta_r}{dt}\right) = (\psi_{ds}\, i_{qs} - \psi_{qs}\, i_{ds})\,\omega_r$$

d'où le couple électromagnétique (résistant), en divisant par ω_r :

$$C_e = \frac{3}{2}(\psi_{ds}\, i_{qs} - \psi_{qs}\, i_{ds}) \tag{11.14}$$

expression indépendante du choix du référentiel.

Le troisième crochet représente les pertes Joule.

Remarque

L'expression (11.14) du couple peut aussi être établie directement à partir de l'expression générale (1.13) changée de signe conformément à (1.21).

D'après le système (11.5), seules les inductances mutuelles entre deux enroulements, l'un au stator, l'autre au rotor, contribuent au couple électromagnétique, autrement dit les inductances mutuelles formant le quart de matrice supérieur droit de (11.5) ; l'application de (1.13) et (1.21) à ces mutuelles donne :

$$C_e = \begin{array}{|c|c|c|}\hline i_{as} & i_{bs} & i_{cs} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|}\hline M_{rs}\sin\theta & M_{rs}\sin\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right) & M_{rs}\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) \\ \hline M_{rs}\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & M_{rs}\sin\theta & M_{rs}\sin\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right) \\ \hline M_{rs}\sin\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right) & M_{rs}\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & M_{rs}\sin\theta \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline i_{ar} \\ \hline i_{br} \\ \hline i_{cr} \\ \hline \end{array}.$$

L'application de la transformation de PARK aux matrices de courant définies au paragraphe 2.3, et compte tenu de (11.1), conduit à (11.14).

4 CAS D'UNE MACHINE MULTIPOLAIRE

Comme cela a été expliqué au chapitre I, et déjà appliqué dans le cas des machines à courant continu et synchrones, si on considère les angles électriques θ et la vitesse électrique ω_r, obtenus en multipliant leurs homologues géométriques et

mécaniques par le nombre de paires de pôles p_1, les équations électriques sont inchangées, et l'équation (11.14) ainsi que l'équation du mouvement s'écrivent :

(11.15) $$\boxed{C_e = \frac{3\,p_1}{2}(\psi_{ds}\,i_{qs} - \psi_{qs}\,i_{ds})}$$

(11.16) $$\boxed{C_m - C_e = \frac{J}{p_1}\frac{d\omega_r}{dt}}\,.$$

5 CHOIX DU RÉFÉRENTIEL

Le référentiel est le système Od, Oq associé à la vitesse de rotation choisie pour lui. Trois types de référentiel sont intéressants en pratique, le choix se faisant en fonction du problème étudié.

Nous allons appeler :

ω = pulsation des courants triphasés appliqués au stator. ω est donc également la vitesse « électrique » du champ tournant.

ω_r = vitesse « électrique » de rotation du rotor

g = glissement, défini par :

(11.17) $$g = \frac{\omega - \omega_r}{\omega}\,.$$

(On sait qu'en régime asynchrone permanent, la pulsation des courants rotoriques est $g\omega$.)

Parmi les équations encadrées ci-dessus, les seules dont la formulation soit affectée par le choix au référentiel sont les équations (11.6) et (11.7).

5.1 Référentiel immobile par rapport au stator

Il se traduit par les conditions :

$$\frac{d\theta_s}{dt} = 0 \qquad \frac{d\theta_r}{dt} = -\omega_r$$

d'où les équations électriques :

(11.18) $$\begin{cases} v_{ds} = -\dfrac{d\psi_{ds}}{dt} - R_s\,i_{ds} \\ v_{qs} = -\dfrac{d\psi_{qs}}{dt} - R_s\,i_{qs} \end{cases}$$

$$\text{(11.19)} \qquad \begin{cases} v_{dr} = \dfrac{d\psi_{dr}}{dt} - \omega_r \psi_{qr} + R_r i_{dr} \\ v_{qr} = \dfrac{d\psi_{qr}}{dt} + \omega_r \psi_{dr} + R_r i_{qr} . \end{cases}$$

Ce référentiel sera choisi de préférence en vue d'étudier des variations importantes de la vitesse de rotation, associées ou non avec des variations de la fréquence d'alimentation.

5.2 Référentiel immobile par rapport au rotor

Il se traduit par les conditions

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \omega_r \qquad \frac{d\theta_r}{dt} = 0$$

d'où les équations électriques :

$$\text{(11.20)} \qquad \begin{cases} v_{ds} = -\dfrac{d\psi_{ds}}{dt} - \omega_r \psi_{qs} - R_s i_{ds} \\ v_{qs} = -\dfrac{d\psi_{qs}}{dt} + \omega_r \psi_{ds} - R_s i_{qs} \end{cases}$$

$$\text{(11.21)} \qquad \begin{cases} v_{dr} = \dfrac{d\psi_{dr}}{dt} + R_r i_{dr} \\ v_{qr} = \dfrac{d\psi_{qr}}{dt} + R_r i_{qr} . \end{cases}$$

Ce référentiel peut être intéressant dans les problèmes de régimes transitoires où la vitesse de rotation est considérée comme constante (exemple : l'étude des contraintes résultant d'un court-circuit).

5.3 Référentiel immobile par rapport au champ tournant

Il se traduit par les relations :

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \omega \qquad \frac{d\theta_r}{dt} = \omega - \omega_r = g\omega$$

d'où les équations électriques :

$$\text{(11.22)} \qquad \begin{cases} v_{ds} = -\dfrac{d\psi_{ds}}{dt} - \omega\psi_{qs} - R_s i_{ds} \\ v_{qs} = -\dfrac{d\psi_{qs}}{dt} + \omega\psi_{ds} - R_s i_{qs} \end{cases}$$

$$\text{(11.23)} \qquad \begin{cases} v_{dr} = \dfrac{d\psi_{dr}}{dt} + g\omega\psi_{qr} + R_r i_{dr} \\ v_{qr} = \dfrac{d\psi_{qr}}{dt} - g\omega\psi_{dr} + R_r i_{qr} . \end{cases}$$

Ce référentiel est le seul qui n'introduise pas de simplification dans la formulation des équations (11.6) et (11.7) ; il est cependant particulièrement avantageux dans les problèmes où la fréquence d'alimentation est constante, car alors, ainsi qu'on l'a vu au chapitre VI à propos des régimes permanents des machines synchrones, aucune des grandeurs d'axes (courants, tensions, flux) ne comporte désormais de porteuse sinusoïdale ce qui simplifie considérablement la conduite des calculs. Aussi ce référentiel est-il très souvent utilisé même dans l'étude de l'alimentation des moteurs asynchrones à fréquence variable, lorsqu'on veut étudier la transmittance du moteur relativement à de petites perturbations autour d'un régime donné.

Remarque

Les conséquences du choix du référentiel sur la formulation des équations électriques nous amènent à la remarque, tout à fait générale dans l'étude de la conversion électromécanique de l'énergie, que les f.é.m. de transformation et de rotation ne sont donc pas des caractéristiques intrinsèques d'un enroulement donné mais dépendent du choix du référentiel.

6 AUTRES TYPES D'ENROULEMENTS

En ce qui concerne le stator, on se reportera aux remarques faites au chapitre V, au début du paragraphe 8.1.

En ce qui concerne le rotor, nous allons considérer successivement l'influence du nombre de phases, puis, dans le cas des rotors à cage, les rotors à double cage et à encoches profondes.

Le principe de décomposition selon deux axes est le même pour un rotor bobiné polyphasé et pour une simple cage, cette dernière pouvant être considérée comme constituée d'autant de phases en court-circuit qu'il y a de barres par pôle.

Soit alors m le nombre de phases du rotor ; on repère les différentes phases, se succédant dans le sens trigonométrique, par les indices 1 r, 2 r, ..., mr et on appelle θ_r l'angle (O1r, Od) entre l'axe de la phase 1 r et l'axe Od. Les composantes d et q du flux rotor sont alors définies, de manière analogue à (5.20), par les relations

(11.24)

$$\begin{cases} \psi_{dr} = \dfrac{2}{m}\left\{\psi_{1r}\cos\theta_r + \psi_{2r}\cos\left(\theta_r - \dfrac{2\pi}{m}\right) + \cdots + \psi_{mr}\cos\left[\theta_r - \dfrac{2(m-1)\pi}{m}\right]\right\} \\ \psi_{qr} = \dfrac{2}{m}\left\{\psi_{1r}\sin\theta_r + \psi_{2r}\sin\left(\theta_r - \dfrac{2\pi}{m}\right) + \cdots + \psi_{mr}\sin\left[\theta_r - \dfrac{2(m-1)\pi}{m}\right]\right\}. \end{cases}$$

En raison de l'hypothèse sinusoïdale, la distribution d'induction dans l'entrefer est également sinusoïdale en fonction de θ d'où il résulte que les deux seuls flux

ψ_{dr} et ψ_{qr} suffisent à caractériser le régime des flux au rotor et on montrerait facilement que :

$$(11.25)\quad \begin{cases} \psi_{1r} = \psi_{dr}\cos\theta_r + \psi_{qr}\sin\theta_r \\ \psi_{2r} = \psi_{dr}\cos\left(\theta_r - \dfrac{2\pi}{m}\right) + \psi_{qr}\sin\left(\theta_r - \dfrac{2\pi}{m}\right) \\ \cdots\cdots \\ \psi_{mr} = \psi_{dr}\cos\left[\theta_r - \dfrac{2(m-1)\pi}{m}\right] + \psi_{qr}\sin\left[\theta_r - \dfrac{2(m-1)\pi}{m}\right]. \end{cases}$$

Du fait que les courants et les flux sont liés par les relations :

$$(11.26)\qquad 0 = \frac{d\psi_{kr}}{dt} + R_r\, i_{kr} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

les courants i_{dr} et i_{qr} définis de même manière qu'en (11.24) sont suffisants pour caractériser le régime des courants qui s'explicite comme en (11.25) (en changeant ψ en i).

Ainsi, ramenée aux axes d et q, la machine asynchrone à rotor polyphasé ou à simple cage conduit aux équations (11.6) à (11.9), à condition toutefois que $v_{dr} = v_{qr} = 0$.

Les équations d'une machine asynchrone à double cage s'obtiennent en ajoutant un deuxième enroulement en court-circuit, dans chaque axe, au rotor figure 11.2 ; les relations entre flux et courants sont alors tout à fait semblables à celles obtenues dans l'axe direct d'une machine synchrone munie d'amortisseurs.

Dans le cas d'une machine asynchrone à simple cage à encoches profondes, l'hypothèse de densité de courant uniforme dans la section n'est plus respectée et les flux et courants ne sont plus liés par des relations linéaires. Cependant, dans le cas où l'effet pelliculaire n'est pas trop prononcé, on peut établir une équivalence approximative avec un moteur à double cage, satisfaisante pour l'étude des régimes transitoires [19].

7 RÉGIME PERMANENT ASYNCHRONE, A ROTOR EN COURT-CIRCUIT

Nous nous proposons simplement de retrouver les équations classiques en nombres complexes ainsi que le schéma équivalent, en utilisant le référentiel lié au champ tournant, et en adoptant une démarche tout à fait semblable à celle du chapitre VI, paragraphe 2, dont nous allons suivre les étapes sans répéter les commentaires.

7.1 Equations électriques et schéma équivalent

Le choix d'un référentiel lié au champ tournant se traduit par la loi gouvernant θ_s (fig. 11.1 et (6.44)) :

$$(11.27)\qquad \theta_s = \omega t + \theta_{s0}$$

avec θ_{s0} arbitraire.

La tension appliquée au stator étant triphasée et de pulsation ω, il résulte de (5.19) que les tensions v_{ds} et v_{qs} appliquées à (11.22) sont des constantes, et que la solution de régime permanent de (11.22), (11.23), (11.8) et (11.9), avec $v_{dr} = v_{qr} = 0$, correspond à des valeurs constantes des différents paramètres, que nous représentons donc par des lettres majuscules, et à des valeurs nulles pour les dérivées par rapport au temps, soit

$$\begin{cases} V_{ds} = -\omega\Psi_{qs} - R_s I_{ds} \\ V_{qs} = \omega\Psi_{ds} - R_s I_{qs} \end{cases} \tag{11.28}$$

$$\begin{cases} 0 = g\omega\Psi_{qr} + R_r I_{dr} \\ 0 = -g\omega\Psi_{dr} + R_r I_{qr} \end{cases} \tag{11.29}$$

$$\begin{vmatrix} \Psi_{ds} \\ \Psi_{dr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_{ds} \\ I_{dr} \end{vmatrix} \tag{11.30}$$

$$\begin{vmatrix} \Psi_{qs} \\ \Psi_{qr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_{qs} \\ I_{qr} \end{vmatrix} \tag{11.31}$$

L'introduction des nombres complexes s'effectue alors de manière analogue au cas des machines synchrones ; il vient de manière semblable à (6.51) et (6.52)

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{ds} = V_{ds} e^{j\theta_{s0}}; & \mathbf{V}_{qs} = -jV_{qs} e^{j\theta_{s0}}; & \mathbf{V}_s\sqrt{2} = \mathbf{V}_{ds} + \mathbf{V}_{qs} \\ \mathbf{\Psi}_{ds} = \Psi_{ds} e^{j\theta_{s0}}; & \mathbf{\Psi}_{qs} = -j\Psi_{qs} e^{j\theta_{s0}}; & \mathbf{\Psi}_s\sqrt{2} = \mathbf{\Psi}_{ds} + \mathbf{\Psi}_{qs} \\ \mathbf{I}_{ds} = I_{ds} e^{j\theta_{s0}}; & \mathbf{I}_{qs} = -jI_{qs} e^{j\theta_{s0}}; & \mathbf{I}_s\sqrt{2} = \mathbf{I}_{ds} + \mathbf{I}_{qs} \\ \mathbf{\Psi}_{dr} = \Psi_{dr} e^{j\theta_{s0}}; & \mathbf{\Psi}_{qr} = -j\Psi_{qr} e^{j\theta_{s0}}; & \mathbf{\Psi}_r\sqrt{2} = \mathbf{\Psi}_{dr} + \mathbf{\Psi}_{qr} \\ \mathbf{I}_{dr} = I_{dr} e^{j\theta_{s0}}; & \mathbf{I}_{qr} = -jI_{qr} e^{j\theta_{s0}}; & \mathbf{I}_r\sqrt{2} = \mathbf{I}_{dr} + \mathbf{I}_{qr} \end{cases} \tag{11.32}$$

d'où, en reportant dans les équations précédentes :

$$\begin{cases} \mathbf{V}_s = -R_s \mathbf{I}_s - j\omega\mathbf{\Psi}_s \\ 0 = R_r \mathbf{I}_r + jg\omega\mathbf{\Psi}_r \end{cases} \tag{11.33}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{\Psi}_s \\ \mathbf{\Psi}_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \end{vmatrix}. \tag{11.34}$$

En introduisant :

— *l'inductance cyclique de fuites totales vue du rotor* :

$$N_r = L_r - \frac{M^2}{L_s} \tag{11.35}$$

— les grandeurs rotoriques ramenées au stator :

$$\mathbf{I}'_r = -\frac{M}{L_s}\mathbf{I}_r \qquad \frac{R'_r}{R_r} = \frac{N'_r}{N_r} = \left(\frac{L_s}{M}\right)^2 \tag{11.36}$$

on retrouve les équations classiques du moteur asynchrone :

$$(11.37) \qquad \begin{cases} \mathbf{V}_s = -\mathrm{R}_s \mathbf{I}_s - \mathrm{jL}_s \omega(\mathbf{I}_s - \mathbf{I}'_r) \\ \mathrm{jL}_s \omega(\mathbf{I}_s - \mathbf{I}'_r) = \left(\dfrac{\mathrm{R}'_r}{g} + \mathrm{jN}'_r \omega\right) \mathbf{I}'_r \end{cases}$$

correspondant au schéma équivalent de la figure 11.3 (rappelons que nous avons toujours conservée jusqu'ici la convention de signes générateur au stator) : à partir de ces éléments on sait retrouver les principales propriétés des machines asynchrones en régime établi ; on trouvera le calcul du couple au chapitre XII, paragraphe 1.2, comme illustration du référentiel lié au rotor.

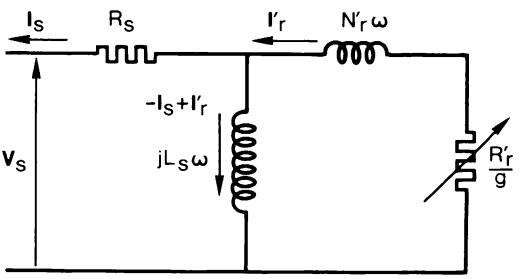


Fig. 11.3. — Schéma équivalent monophasé d'une machine asynchrone en régime permanent.

7.2 Remarques sur l'orientation des axes *d* et *q* dans le plan complexe

Les relations (11.32) correspondent à la décomposition des nombres complexes des équations (11.33) à (11.37) selon les deux axes perpendiculaires O*d* et O*q* (O*q* en retard de $\pi/2$ sur O*d*).

L'angle θ_{s0} figurant dans (11.27) étant arbitraire, on peut choisir l'emplacement des axes O*d*, O*q* dans le plan complexe.

Considérons par exemple la tension appliquée au stator ; elle peut s'écrire, V_s étant la valeur efficace

$$(11.38) \qquad \begin{cases} v_{as} = \mathrm{V}_s\sqrt{2}\cos(\omega t + \lambda) \\ v_{bs} = \mathrm{V}_s\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \lambda - \dfrac{2\pi}{3}\right) \\ v_{cs} = \mathrm{V}_s\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \lambda - \dfrac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

portant (11.27) et (11.38) dans (5.19) il vient :

$$(11.39) \qquad \begin{cases} v_{ds} = \mathrm{V}_s\sqrt{2}\sin\left(\lambda - \theta_{s0} + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ v_{qs} = \mathrm{V}_s\sqrt{2}\cos\left(\lambda - \theta_{s0} + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ v_{os} = 0\,. \end{cases}$$

Ces relations montrent bien que v_{ds} et v_{qs} sont des constantes, notées V_{ds} et V_{qs}, liées à V_s par la relation

$$\sqrt{V_{ds}^2 + V_{qs}^2} = V_s\sqrt{2}$$

ce qui explique le coefficient $\sqrt{2}$ introduit en (11.32).

Dans le plan complexe associé à l'opérateur $e^{j\omega t}$, l'axe O*d*, d'après (11.27), est orienté dans la direction θ_{s0}, et l'axe O*q* dans la direction $\theta_{s0} - \pi/2$, d'où l'orientation de $\mathbf{V}_s$ d'après (11.32) et (11.39). Par exemple on peut choisir θ_{s0} pour que $\mathbf{V}_s$ soit purement d'axe en quadrature, soit :

(11.40) $$\mathbf{V}_{qs} = \mathbf{V}_s\sqrt{2}; \qquad \mathbf{V}_{ds} = 0$$

il suffit pour cela, d'après (11.39), de choisir :

$$\theta_{s0} = \lambda + \frac{\pi}{2}.$$

Il est important de noter que les nombres complexes introduits depuis (11.32) jusqu'à (11.40) ont des expressions et des valeurs particulières liées au fait que les quantités scalaires associées sont des constantes, parce qu'exprimées dans un référentiel synchrone avec le champ tournant. La formulation se présente sous un aspect légèrement différent dans un référentiel tournant à une autre vitesse : voir par exemple les formules (8.4) et (8.5).

8 VALEURS RÉDUITES

Tout comme pour les machines synchrones, il est possible d'utiliser les valeurs réduites pour traiter les problèmes relatifs aux machines asynchrones, mais cet usage est beaucoup moins répandu et nous nous contenterons d'en indiquer le principe.

Si on suppose le stator triphasé, le principe de passage aux valeurs réduites est le même qu'au chapitre VI, paragraphe 1.2 ; les relations peuvent même être conservées en ajoutant simplement l'indice *s* lorsque c'est nécessaire.

En ce qui concerne le rotor, et en se limitant au cas triphasé, il suffit dans une première étape de ramener au stator les grandeurs rotoriques par un changement d'échelle convenable, par exemple celui proposé en (11.36) ; dès lors pour exprimer les grandeurs rotoriques en valeurs réduites il suffit d'utiliser les mêmes relations de passage que pour le stator, c'est-à-dire les relations du chapitre VI, paragraphe 1.2.

CHAPITRE XII

EXEMPLES DE RÉGIMES TRANSITOIRES DES MACHINES ASYNCHRONES

Les méthodes utilisées pour l'étude des régimes transitoires des machines asynchrones ne diffèrent pas sensiblement de celles utilisées pour les machines synchrones qui ont été notablement approfondies dans les chapitres précédents. Aussi dans ce chapitre nous développerons seulement quelques exemples ponctuels, destinés à fixer les idées et aussi à montrer l'utilisation de référentiels particuliers. En fin de chapitre on indiquera un procédé de regroupement des équations, basé sur les propriétés de symétrie des machines asynchrones.

1 ÉTUDE DE RÉGIMES TRANSITOIRES EN UTILISANT LE RÉFÉRENTIEL LIÉ AU ROTOR

Dans ce paragraphe nous considérerons uniquement des régimes transitoires au cours desquels la vitesse peut être considérée comme constante. C'est en particulier le cas des régimes tels que court-circuit aux bornes, déconnexion brusque du réseau, lorsqu'on s'intéresse à l'évolution des grandeurs électriques aux premiers instants suivant la perturbation. Les équations électriques (11.20) et (11.21) et magnétiques (11.8) et (11.9) constituent alors un système d'équations différentielles linéaires et on peut leur appliquer la transformation de LAPLACE.

1.1 Formulation opérationnelle en fonction des grandeurs statoriques

Supposant en outre le rotor en court-circuit ($v_{dr} = v_{qr} = 0$), la transformation de LAPLACE appliquée aux variations des grandeurs figurant dans les équations (11.20), (11.21), (11.8) et (11.9) conduit à :

$$\begin{cases} \Delta v_{ds} = -p\,\Delta\psi_{ds} - \omega_r\,\Delta\psi_{qs} - R_s\,\Delta i_{ds} \\ \Delta v_{qs} = -p\,\Delta\psi_{qs} + \omega_r\,\Delta\psi_{ds} - R_s\,\Delta i_{qs} \end{cases} \tag{12.1}$$

$$\begin{cases} 0 = p\,\Delta\psi_{dr} + R_r\,\Delta i_{dr} \\ 0 = p\,\Delta\psi_{qr} + R_r\,\Delta i_{qr} \end{cases} \tag{12.2}$$

$$\begin{vmatrix} \Delta\psi_{ds} \\ \Delta\psi_{dr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Delta i_{ds} \\ \Delta i_{dr} \end{vmatrix} \tag{12.3}$$

$$\begin{vmatrix} \Delta\psi_{qs} \\ \Delta\psi_{qr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Delta i_{qs} \\ \Delta i_{qr} \end{vmatrix} . \tag{12.4}$$

On procède alors à l'élimination des grandeurs rotoriques $\Delta\psi_{dr}, \Delta\psi_{qr}, \Delta i_{dr}, \Delta i_{qr}$ entre les équations (12.2) à (12.4) et il vient en posant :

$$T'_o = \frac{L_r}{R_r} \tag{12.5}$$

T'_o = *constante de temps du rotor, le stator étant à circuit ouvert*

$$T' = \frac{N_r}{R_r} \tag{12.6}$$

T' = *constante de temps du rotor, le stator étant en court-circuit,* N_r étant définie en (11.35) :

$$\begin{cases} \Delta\psi_{ds} = L_s \dfrac{1 + T' p}{1 + T'_o p} \Delta i_{ds} \\ \Delta\psi_{qs} = L_s \dfrac{1 + T' p}{1 + T'_o p} \Delta i_{qs} . \end{cases} \tag{12.7}$$

Les relations (12.1) et (12.7) permettent d'étudier les régimes transitoires électriques à vitesse constante.

Il est possible de calculer le couple à l'aide de la relation (11.15), où les flux et les courants doivent être remplacés par leur expression temporelle, somme de la valeur avant perturbation et de la valeur superposée, qui est l'original de la solution de (12.1) et (12.7).

1.2 Expression du couple en régime permanent asynchrone

L'expression du couple s'obtient facilement à partir de la formulation précédente ; dans le repère lié au rotor la méthode est la même que lors de l'étude faite au chapitre VIII paragraphe 1 pour le fonctionnement asynchrone des machines synchrones ; nous allons pouvoir en reproduire les grandes lignes sans entrer dans les détails.

Les tensions appliquées au stator s'écrivent comme en (8.1) (mais ici en unités physiques) :

$$\begin{cases} v_{as} = V_s\sqrt{2} \cos(\omega t + \lambda) \\ v_{bs} = V_s\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \lambda - \dfrac{2\pi}{3}\right) \\ v_{cs} = V_s\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \lambda - \dfrac{4\pi}{3}\right) . \end{cases} \tag{12.8}$$

La transformation de PARK (5.19) donne, avec

$$\theta_s = \omega_r t + \theta_{s0} \tag{12.9}$$

$$\begin{cases} v_{ds} = V_s\sqrt{2}\cos(g\omega t + \lambda - \theta_{s0}) \\ v_{qs} = V_s\sqrt{2}\cos\left(g\omega t + \lambda - \theta_{s0} + \frac{\pi}{2}\right). \end{cases} \tag{12.10}$$

Ces tensions doivent être appliquées au système (11.20), (11.21), (11.8) et (11.9), avec rotor en court-circuit ($v_{dr} = v_{qr} = 0$). Comme ce système est linéaire, la solution est sinusoïdale de pulsation $g\omega$, et peut donc être obtenue à partir de (12.1) et (12.7) en remplaçant les courants, flux, tensions par des nombres complexes (associés à l'opérateur $e^{jg\omega t}$) et p par $jg\omega$

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{ds} = V_s\sqrt{2}\, e^{j(\lambda - \theta_{s0})} = \mathbf{V}_s\sqrt{2} \\ \mathbf{V}_{qs} = j\mathbf{V}_s\sqrt{2} \end{cases} \tag{12.11}$$

(on notera la différence avec (11.32) et son cas particulier (11.40) ; cette différence est due au fait qu'ici les grandeurs d'axe sont non plus des constantes mais des fonctions sinusoïdales du temps puisque le référentiel ne tourne pas à la vitesse de synchronisme).

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{ds} = -jg\omega\boldsymbol{\Psi}_{ds} - \boldsymbol{\Psi}_{qs}\,\omega(1-g) - R_s\,\mathbf{I}_{ds} \\ \mathbf{V}_{qs} = -jg\omega\boldsymbol{\Psi}_{qs} + \boldsymbol{\Psi}_{ds}\,\omega(1-g) - R_s\,\mathbf{I}_{qs} \end{cases} \tag{12.12}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Psi}_{ds} = L_s\dfrac{1 + jg\omega T'}{1 + jg\omega T'_o}\mathbf{I}_{ds} \\ \boldsymbol{\Psi}_{qs} = L_s\dfrac{1 + jg\omega T'}{1 + jg\omega T'_o}\mathbf{I}_{qs}. \end{cases} \tag{12.13}$$

Le système (12.12) et (12.13) peut être résolu compte tenu de (12.11). Nous allons effectuer cette résolution en négligeant R_s, en vue d'obtenir l'expression du couple.

Il vient d'abord :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Psi}_{ds} = j\dfrac{V_s\sqrt{2}}{\omega} \\ \boldsymbol{\Psi}_{qs} = -\dfrac{V_s\sqrt{2}}{\omega}. \end{cases} \tag{12.14}$$

Les quatre nombre complexes $\boldsymbol{\Psi}_{ds}$, $\boldsymbol{\Psi}_{qs}$, $\mathbf{I}_{ds}$, $\mathbf{I}_{qs}$ étant ainsi explicités on calcule C_e par la méthode du chapitre VIII, paragraphe 1.4, compte tenu de l'expression (11.15) relative aux unités physiques.

L'isotropie de la machine entraîne que le terme pulsatoire (en $e^{2jg\omega t}$) est nul et l'homologue de (8.9) s'écrit ici :

$$C_e = -\frac{3\,p_1\,V_s^2}{\omega}\,\mathcal{R}e\left\{\frac{1}{jL_s\,\omega} \times \frac{1 + jg\omega T'_o}{1 + jg\omega T'}\right\}$$

ce qui, compte tenu de (12.5), (12.6), (11.35) et (11.36) conduit à l'expression classique du couple

$$C_e = -\frac{3\,p_1}{\omega} \times \frac{V_s^2 \dfrac{R'_r}{g}}{\left(\dfrac{R'_r}{g}\right)^2 + N'^2_r\,\omega^2} \tag{12.15}$$

(le signe — étant lié à la convention « générateur »).

1.3 Exemples de perturbations brusques

Ainsi que nous l'avons annoncé plus haut, nous ne considérons ici que des régimes au cours desquels la vitesse peut être considérée comme constante ; la prise en compte des variations de vitesse lors de perturbations de grande amplitude ne peut être effectuée analytiquement, ainsi qu'on l'a expliqué au chapitre III, et nécessiterait le recours à des auxiliaires de calcul.

Nous allons étudier deux régimes transitoires simples :

— court-circuit triphasé aux bornes
— déconnexion du réseau

1.3.1 *Régime initial*

Le régime initial est un régime permanent asynchrone. Exprimé à l'aide de nombres complexes, dans le repère lié au rotor, il est caractérisé par les relations (12.11) à (12.13), qui déterminent toutes les grandeurs à condition de choisir g.

Les valeurs initiales, au sens temporel, nécessitent de repasser aux expressions temporelles et d'y faire $t = 0$.

L'angle θ_{s0} étant arbitraire, on peut le choisir de façon à simplifier les conditions initiales. Considérant (12.10), par exemple, on voit que si on choisit

$$\theta_{s0} = \lambda \tag{12.16}$$

il vient, pour $t = 0$

$$V_{ds0} = V_s\sqrt{2} \qquad V_{qs0} = 0 \tag{12.17}$$

puis, tenant compte de (12.11) et (12.14)

$$\Psi_{ds0} = 0\,, \qquad \Psi_{qs0} = -\frac{V_s\sqrt{2}}{\omega}\,. \tag{12.18}$$

La valeur initiale des courants, un peu plus compliquée, s'obtiendrait en explicitant (12.13).

Par la suite, et pour simplifier encore les calculs, nous supposerons que le glissement initial avant perturbation est nul : l'amplitude et la loi de variation des différentes grandeurs ne sont pas notablement différentes dans ce cas et dans le cas où le glissement initial est non nul (mais faible) ; par contre les calculs seront

plus simples ce qui est préférable pour une meilleure compréhension et dans la mesure où l'exemple même simplifié permet d'illustrer la méthode.

Dans ces conditions il résulte de (12.13) et (12.18) que

$$I_{ds0} = 0 \qquad I_{qs0} = -\frac{V_s\sqrt{2}}{L_s\,\omega}. \tag{12.19}$$

1.3.2 *Court-circuit triphasé aux bornes*

La machine est primitivement connectée à un réseau triphasé de pulsation ω et de tension V_s (tension simple en valeur efficace). Dans la représentation selon deux axes (fig. 12.1) cela signifie que les bobinages fictifs *ds* et *qs* sont raccordés aux sources de tension v_{ds} et v_{qs} (12.10) dont les valeurs initiales V_{ds0} et V_{qs0} sont données par (12.17).

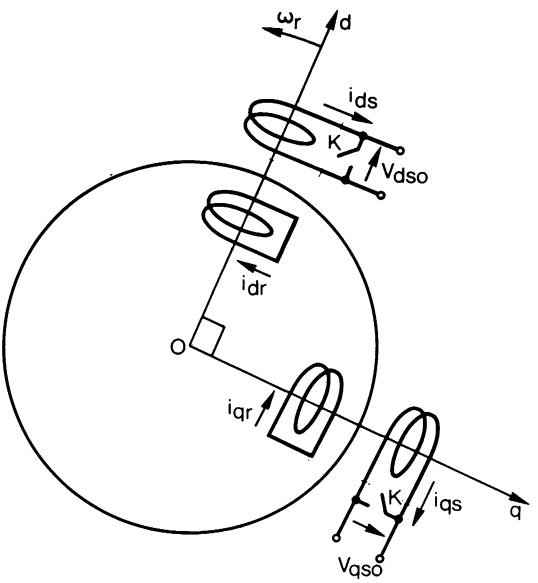


Fig. 12.1. — Situation préalable à la mise en court-circuit d'une machine asynchrone à vide.

1.3.2.1 *Calcul du courant dans les phases du stator*

La mise en court-circuit conduit à annuler les tensions aux bornes de la machine, autrement dit à fermer à l'instant $t = 0$ les interrupteurs K de la figure 12.1.

Le régime peut alors être étudié en superposant au régime préexistant le régime obtenu en appliquant aux bornes des interrupteurs K des tensions égales et opposées aux valeurs initiales, données par (12.17) dans le cas présent. Ces valeurs doivent être substituées à Δv_{ds} et Δv_{qs} dans (12.1) (avec ici $\omega_r = \omega$) et d'autre part en posant dans (12.7)

$$L_s(p) = L_s\frac{1 + T' p}{1 + T'_o p}. \tag{12.20}$$

Le système à résoudre devient :

$$(12.21)\qquad \begin{cases} -\dfrac{V_s\sqrt{2}}{p} = -p\,\Delta\psi_{ds} - \omega\,\Delta\psi_{qs} - R_s\,\Delta i_{ds} \\ 0 = -p\,\Delta\psi_{qs} + \omega\,\Delta\psi_{ds} - R_s\,\Delta i_{qs} \\ \Delta\psi_{ds} = L_s(p)\,\Delta i_{ds} \\ \Delta\psi_{qs} = L_s(p)\,\Delta i_{qs} \end{cases}$$

soit en éliminant $\Delta\psi_{ds}$ et $\Delta\psi_{qs}$:

$$(12.22)\qquad \begin{vmatrix} -\dfrac{V_s\sqrt{2}}{p} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R_s - pL_s(p) & -\omega L_s(p) \\ \omega L_s(p) & -R_s - pL_s(p) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Delta i_{ds} \\ \Delta i_{qs} \end{vmatrix}$$

Le déterminant de ce système s'écrit :

$$\text{Det} = [L_s(p)]^2 \left[p^2 + \omega^2 + \frac{2pR_s}{L_s(p)} + \frac{R_s^2}{[L_s(p)]^2} \right].$$

Ce déterminant peut être simplifié de la même façon, et pour les mêmes raisons, que celui rencontré au chapitre VII, paragraphe 3.1, à l'occasion de l'étude des machines synchrones :

— on peut négliger $R_s^2/[L_s(p)]^2$ devant ω^2

— dans $\dfrac{2pR_s}{L_s(p)}$ on peut remplacer $L_s(p)$ par

$$(12.23)\qquad N_s = L_s - \frac{M^2}{L_r}$$

N_s, *inductance cyclique de fuites totales vues du stator*, est aussi la valeur limite de $L_s(p)$ lorsque $p \to \infty$, compte tenu de (11.35), (12.5), (12.6) et (12.20).

On pose :

$$(12.24)\qquad \alpha = \frac{R_s}{N_s} = \frac{1}{T_a}$$

α est le *coefficient d'amortissement du stator* (en présence du rotor en court-circuit) et T_a est la *constante de temps du stator.*

Le déterminant s'écrit alors :

$$(12.25)\qquad \text{Det} = [L_s(p)]^2\,(p^2 + 2\,\alpha p + \omega^2)$$

et la résolution du système (12.22) donne, en négligeant R_s au numérateur de la solution :

$$(12.26)\qquad \begin{cases} \Delta i_{ds}(p) = \dfrac{V_s\sqrt{2}}{L_s(p)\,(p^2 + 2\,\alpha p + \omega^2)} \\ \Delta i_{qs}(p) = \dfrac{V_s\sqrt{2}\,\omega}{pL_s(p)\,(p^2 + 2\,\alpha p + \omega^2)}. \end{cases}$$

Le passage à l'original est facilité si on pose, à partir de (12.20) et (12.29)

$$\frac{1}{L_s(p)} = \frac{1}{L_s} + \left(\frac{1}{N_s} - \frac{1}{L_s}\right)\frac{T' p}{1 + T' p} \tag{12.27}$$

puis si on applique les mêmes principes et les mêmes simplifications qu'au chapitre VII, paragraphe 3, utilisant notamment les approximations (7.29).

Il vient alors

$$\begin{cases} \Delta i_{ds}(t) = -\dfrac{V_s\sqrt{2}}{N_s\omega}\left[\dfrac{T'_o - T'}{\omega T' T'_o} e^{-t/T'} - e^{-\alpha t}\sin\omega t\right] \\ \Delta i_{qs}(t) = \dfrac{V_s\sqrt{2}}{N_s\omega}\left[\dfrac{T'}{T'_o} + \dfrac{T'_o - T'}{T'_o} e^{-t/T'} - e^{-\alpha t}\cos\omega t\right] \end{cases} \tag{12.28}$$

soit en utilisant le fait que

$$\frac{L_s}{N_s} = \frac{L_r}{N_r} = \frac{T'_o}{T'}, \tag{12.29}$$

en considérant que $\omega T'$ et $\omega T'_o$ sont $\gg 1$ et en tenant compte du régime initial (12.19)

$$\begin{cases} i_{ds}(t) = \dfrac{V_s\sqrt{2}}{N_s\omega} e^{-\alpha t}\sin\omega t \\ i_{qs}(t) = \dfrac{V_s\sqrt{2}}{N_s\omega}\left(\dfrac{L_s - N_s}{L_s} e^{-t/T'} - e^{-\alpha t}\cos\omega t\right). \end{cases} \tag{12.30}$$

Pour obtenir l'expression d'un courant de phase, $i_{as}(t)$ par exemple, il suffit de porter (12.30) dans la transformation de PARK (5.23), en remplaçant θ par $\theta_s = \omega t + \lambda$ d'après (12.9) et (12.16) d'où :

$$i_{as} = \frac{V_s\sqrt{2}}{N_s\omega}\left[\frac{L_s - N_s}{L_s} e^{-t/T'}\sin(\omega t + \lambda) - e^{-\alpha t}\sin\lambda\right]. \tag{12.31}$$

Le courant dans les phases *bs* et *cs* s'obtient en remplaçant λ par $\lambda - \dfrac{2\pi}{3}$ et $\lambda - \dfrac{4\pi}{3}$ respectivement.

1.3.2.2 *Interprétation physique*

On constate bien que les courants i_{ds}, i_{qs}, i_{as} ne subissent pas de discontinuité à l'instant du défaut et qu'ils tendent vers une valeur nulle.

La composante apériodique amortie du courant i_{as} correspond au maintien, à travers cet enroulement, du flux emprisonné à l'instant initial, créant un appel d'ampères-tours qui s'éteignent avec la constante de temps $T_a = 1/\alpha$ du stator.

La composante oscillatoire amortie du courant i_{as} est induite dans la phase *as* par le flux emprisonné à l'instant initial dans les enroulements du rotor en court-

circuit, flux qui continue à tourner à la vitesse ω avec le rotor. Ce flux, pour son maintien, entraîne au rotor un appel d'ampères-tours qui s'éteignent avec la constante de temps T′ du rotor.

1.3.2.3 *Intérêt et applications de l'étude*

Le court-circuit brusque, appliqué à vide et éventuellement à tension réduite, peut être réalisé à titre d'essai dans le but de déterminer les paramètres transitoires de la machine asynchrone, notamment la réactance $N_s\,\omega$, la constante de temps T′ et le coefficient d'amortissement α. Le mode d'exploitation de l'enregistrement, en fonction du temps, du courant dans les phases du stator est le même que dans le cas du court-circuit aux bornes d'une machine synchrone, développé au chapitre VII, paragraphe 3.3.3.

Le calcul du régime transitoire consécutif à un court-circuit permet d'évaluer d'une part les efforts électrodynamiques subis par les enroulements, notamment les têtes de bobines du stator, d'autre part le couple électromagnétique conduisant à des contraintes sur la ligne d'arbre, sur la carcasse et sur le bâti du moteur ; il permet aussi de prévoir le réglage des protections. Pour une meilleure précision, il conviendrait cependant de tenir compte de la saturation et d'appliquer le court-circuit à partir du régime en charge, donc à glissement faible mais non nul.

1.3.3 *Tension aux bornes d'une machine asynchrone au moment où on la sépare du réseau*

Nous supposerons les mêmes conditions initiales que dans l'exemple précédent : machine primitivement connectée à un réseau triphasé de pulsation et de tension simple V_s, glissement nul. La représentation selon les deux axes est celle de la figure 12.2, et la perturbation revient à ouvrir les interrupteurs K, annulant les courants i_{ds} et i_{qs}.

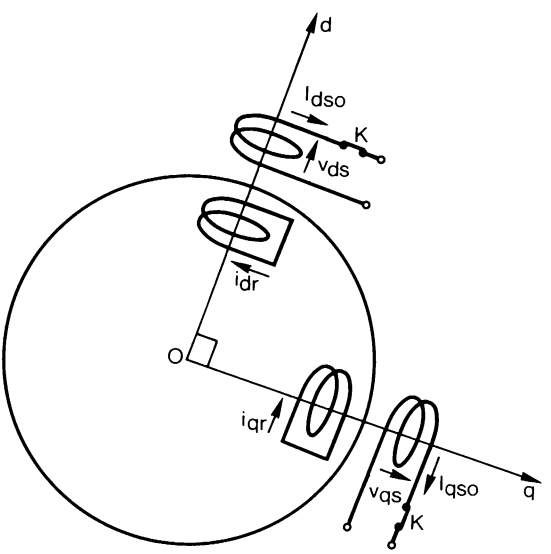


Fig. 12.2. — Situation préalable au déclenchement d'une machine asynchrone à vide.

Le régime peut alors être étudié en superposant au régime préexistant le régime obtenu en appliquant aux bornes des interrupteurs K des courants égaux et opposés aux valeurs initiales, données par (12.19) ; ces valeurs doivent être substituées à Δi_{ds} et Δi_{qs} dans (12.7), ce qui donne tout d'abord :

$$(12.32) \qquad \begin{cases} \Delta\psi_{ds}(p) = 0 \\ \Delta\psi_{qs}(p) = \dfrac{V_s\sqrt{2}}{\omega} \cdot \dfrac{1 + T' p}{p(1 + T'_o p)} . \end{cases}$$

Ces valeurs sont alors reportées dans (12.1) où on peut négliger la résistance du stator R_s :

$$(12.33) \qquad \begin{cases} \Delta v_{ds}(p) = - V_s\sqrt{2}\dfrac{1 + T' p}{p(1 + T'_o p)} \\ \Delta v_{qs}(p) = - V_s\sqrt{2}\dfrac{1 + T' p}{\omega(1 + T'_o p)} \end{cases}$$

Le numérateur et le dénominateur de $\Delta v_{qs}(p)$ sont de même degré en p, ce qui annonce l'existence, dans l'original, d'une impulsion de DIRAC, correspondant à la surtension de coupure (de très courte durée).

Le passage à l'original de (12.33) ne présente pas de difficulté. Dans les expressions temporelles suivantes,

— on n'a pas fait figurer l'impulsion de DIRAC
— on a tenu compte de (12.29) et aussi du fait que $\omega T'$ et $\omega T'_o$ sont $\gg 1$
— on a rajouté les conditions initiales (12.17)

soit :

$$(12.34) \qquad \begin{cases} v_{ds}(t) = V_s\sqrt{2}\left(1 - \dfrac{N_s}{L_s}\right) e^{-t/T'_o} \\ v_{qs}(t) \neq 0 . \end{cases}$$

La tension aux bornes d'une phase du stator, *as* par exemple, est obtenue en portant (12.34) dans la transformation de PARK (5.24), en y remplaçant θ par $\theta_s = \omega t + \lambda$, soit :

$$(12.35) \qquad v_{as}(t) = V_s\sqrt{2}\left(1 - \frac{N_s}{L_s}\right) e^{-t/T'_o} \cos(\omega t + \lambda) .$$

L'amplitude de la tension subit donc à l'instant initial une discontinuité de valeur relative N_s/L_s, puis s'éteint avec la constante de temps du rotor en présence du stator à circuit ouvert (12.5). La discontinuité de l'amplitude de tension provient de ce que seul est conservé à l'instant initial le flux emprisonné dans les enroulements du rotor, le flux empruntant les trajets de fuites se trouvant par contre libéré à l'ouverture du circuit statorique.

L'intérêt de cette étude, outre le fait qu'elle fournit une méthode expérimentale de détermination de la constante de temps T'_o que l'on peut aussi obtenir par le calcul à partir de (12.29), est de permettre l'évaluation de la loi de décroissance

du flux conservé par le rotor (et donc de la tension aux bornes), dans le cas où la déconnexion est suivie d'une reconnexion. La vitesse étant légèrement différente du synchronisme, la tension résiduelle présente un déphasage quelconque par rapport à celle du réseau au moment de la reconnexion, pouvant aller jusqu'à la complète opposition de phase. Souvent d'ailleurs la déconnexion concerne non pas un seul moteur mais un ensemble moteurs restant connectés ensemble, qui sont ensuite reconnectés au réseau ; dans ce cas cependant les calculs sont beaucoup plus compliqués ; la mise en équation de chaque moteur est effectuée de la même manière que ci-dessus, mais la résolution du problème nécessite le recours à un ordinateur.

Remarque : Dans le cas où le glissement initial n'est pas nul, la pseudo-pulsation de la tension $v_{as}(t)$ devient immédiatement égale à $\omega(1 - g)$ à l'instant de la séparation du réseau.

2 ÉTUDE DE RÉGIMES TRANSITOIRES EN UTILISANT LE RÉFÉRENTIEL LIÉ AU CHAMP TOURNANT

Ainsi que cela a été indiqué au chapitre XI, paragraphe 5.3, l'intérêt de ce référentiel réside dans le fait qu'en régime établi les grandeurs d'axes sont des constantes. Les équations générales sont les équations magnétiques (11.8) et (11.9), électriques (11.22) et (11.23), mécaniques (11.15) et (11.16).

2.1 Moteur asynchrone alimenté en courant par l'intermédiaire d'un convertisseur électronique

Dans cet exemple particulièrement simple les équations (11.22) sont inutiles ; dans les équations (11.23) on considère le rotor en court-circuit, soit $v_{dr} = v_{qr} = 0$; comme par ailleurs l'un des paramètres de réglage pourra être la fréquence des courants rotoriques on est amené à éliminer le glissement en posant

$$\omega_i = g\omega \tag{12.36}$$

ω_i = pulsation des courants induits au rotor, d'où, d'après (11.17)

$$\omega = \omega_r + \omega_i \tag{12.37}$$

Les équations (11.23) deviennent :

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\mathrm{d}\psi_{dr}}{\mathrm{d}t} + \omega_i \psi_{qr} + \mathrm{R}_r i_{dr} \\ 0 = \dfrac{\mathrm{d}\psi_{qr}}{\mathrm{d}t} - \omega_i \psi_{dr} + \mathrm{R}_r i_{qr} . \end{cases} \tag{12.38}$$

On peut exprimer les flux en fonction des courants à l'aide de (11.8) et (11.9) ; cependant, l'angle θ_s étant donné par (11.27), et l'angle θ_{s0} étant arbitraire, on peut choisir θ_{s0} de façon que i_{qs} par exemple soit nul : il suffit d'appliquer aux courants statoriques les remarques du chapitre XI, paragraphe 6.2 à propos des

tensions ; le choix convenable pour θ_{s0} apparaît immédiatement en transposant aux courants les relations (11.39).

Avec $i_{qs} = 0$, les relations (12.38) deviennent :

$$(12.39)\qquad \begin{cases} 0 = M\dfrac{di_{ds}}{dt} + \left(R_r + L_r\dfrac{d}{dt}\right) i_{dr} + \omega_i L_r i_{qr} \\ 0 = \left(R_r + L_r\dfrac{d}{dt}\right) i_{qr} - \omega_i(M i_{ds} + L_r i_{dr}) \end{cases}$$

et l'équation du couple (11.15) devient :

$$(12.40)\qquad C_e = -\frac{3p}{2} M i_{ds} i_{qr} .$$

La stabilité du réglage s'étudie à partir des petites variations autour d'un régime de fonctionnement donné. La différentiation des équations (12.39) et (12.40) donne :

$$(12.41)\qquad \begin{cases} 0 = M\dfrac{d\Delta i_{ds}}{dt} + \left(R_r + L_r\dfrac{d}{dt}\right)\Delta i_{dr} + \omega_{i0} L_r \Delta i_{qr} + L_r i_{qr0}\Delta\omega_i \\ 0 = \left(R_r + L_r\dfrac{d}{dt}\right)\Delta i_{qr} - \omega_{i0}(M\Delta i_{ds} + L_r \Delta i_{dr}) - (M i_{ds0} + L_r i_{dr0})\Delta\omega_i \\ \Delta C_e = -\dfrac{3p\cdot M}{2}(i_{ds0}\Delta i_{qr} + i_{qr0}\Delta i_{ds}) . \end{cases}$$

On peut par exemple éliminer Δi_{dr} et Δi_{qr} entre ces trois équations et obtenir l'influence, sur la variation ΔC_e du couple électromagnétique, des variations du courant stator Δi_{ds} et de la pulsation rotorique $\Delta\omega_i$. Les équations différenciées étant linéaires on peut leur appliquer le calcul opérationnel ou l'analyse fréquencielle. On trouvera dans [20] l'étude de certaines possibilités de réglage associées à ce type d'alimentation.

2.2 Démarrage d'un moteur asynchrone alimenté à fréquence constante

Le moteur, primitivement à l'arrêt, est supposé alimenté à l'instant 0 par une tension triphasée de pulsation ω et de valeur efficace V_s (tension simple), ces deux quantités étant supposées invariables.

2.2.1 *Equations électriques*

Si les tensions de phases suivent une loi telle que (11.38), les tensions d'axes sont données par (11.39) et on peut choisir θ_{s0} tel que $v_{ds} = 0$ (soit $\theta_{s0} = \lambda + \pi/2$).

Les équations (11.22) s'écrivent, pour $t > 0$:

$$(12.42)\qquad \begin{cases} 0 = -\dfrac{d\psi_{ds}}{dt} - \omega\psi_{qs} - R_s i_{ds} \\ V_s\sqrt{2} = -\dfrac{d\psi_{qs}}{dt} + \omega\psi_{ds} - R_s i_{qs} \end{cases}$$

et les équations (11.23), si on suppose le rotor en court-circuit :

$$(12.43)\qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{d\psi_{dr}}{dt} + g\omega\psi_{qr} + R_r\, i_{dr} \\ 0 = \dfrac{d\psi_{qr}}{dt} - g\omega\psi_{dr} + R_r\, i_{qr}\,. \end{cases}$$

2.2.2 *Régime transitoire au démarrage*

A l'application de la tension se produit un régime transitoire d'établissement des flux et des courants. Supposons tout d'abord qu'il soit de durée suffisamment faible pour que la vitesse n'ait pas le temps de varier sensiblement. Nous posons donc $g = 1$ pendant cette première phase.

Si la résistance R_r n'est pas trop élevée, nous montrerons au paragraphe 3 que tout se passe comme si elle était nulle et dans ces conditions (12.43) entraîne

$$(12.44)\qquad \psi_{dr} = \psi_{qr} = 0\,.$$

En pratique cela provient de ce que les phases du rotor, en court-circuit, s'opposent à l'établissement d'un flux variant à la pulsation ω.

Si on reporte (12.44) dans les équations magnétiques (11.8) et (11.9) elles deviennent, compte tenu de (12.23)

$$(12.45)\qquad \psi_{ds} = N_s\, i_{ds} \qquad \psi_{qs} = N_s\, i_{qs}$$

et, compte tenu de (12.24), (12.42) s'écrit :

$$(12.46)\qquad \begin{cases} 0 = -\dfrac{d\psi_{ds}}{dt} - \omega\psi_{qs} - \alpha\psi_{ds} \\ V_s\sqrt{2} = -\dfrac{d\psi_{qs}}{dt} + \omega\psi_{ds} - \alpha\psi_{qs}\,. \end{cases}$$

Ce système se résout très simplement, compte tenu des valeurs initiales nulles des flux, et du fait que $\alpha \ll \omega$:

$$(12.47)\qquad \begin{cases} \psi_{ds} = \dfrac{V_s\sqrt{2}}{\omega}(1 - e^{-\alpha t}\cos\omega t) \\ \psi_{qs} = -\dfrac{V_s\sqrt{2}}{\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t\,. \end{cases}$$

Soit pour une phase quelconque, par exemple la phase a, utilisant (5.25) et sachant que $\theta_s = \omega t + \lambda + \dfrac{\pi}{2}$

$$(12.48)\qquad \psi_{as} = -\frac{V_s\sqrt{2}}{\omega}[\sin(\omega t + \lambda) - e^{-\alpha t}\sin\lambda]\,.$$

Le terme décroissant en $e^{-\alpha t}$ correspond donc classiquement au respect de la continuité du flux à l'instant de l'enclenchement. Il s'éteint rapidement mais sa

présence donne lieu à des courants très élevés, d'autant plus que le régime est alors fortement saturé (le flux peut atteindre jusqu'à deux fois sa valeur nominale dans l'une des phases). Ce terme donne également lieu à un couple pulsatoire (pulsation ω) très important. Le calcul rigoureux doit impérativement tenir compte de la saturation.

Remarque : Nous avons supposé que la vitesse reste nulle pendant le régime transitoire d'établissement du flux. Le calcul devient plus compliqué lorsqu'on veut tenir compte de la variation de vitesse intervenant pendant cette période. Elle peut n'être pas négligeable lorsque l'inertie des masses tournantes et le coefficient d'amortissement α sont faibles. On peut alors montrer que dans ce cas la vitesse n'est pas régulièrement croissante mais a tendance à osciller tout en croissant en valeur moyenne, et que le couple pulsatoire a une amplitude plus faible que celle calculée en hypothèse de vitesse nulle.

2.2.3 *Etude de la montée en vitesse*

Une fois éteint le régime transitoire on peut écrire :

$$\begin{cases} \psi_{ds} = \dfrac{V_S\sqrt{2}}{\omega} \\ \psi_{qs} = 0\,. \end{cases} \tag{12.49}$$

Entre les équations (11.8), (11.9), (12.43) et (12.49) on peut éliminer tous les flux et les courants statoriques i_{ds} et i_{qs}. Il vient, en introduisant N_r (11.35) :

$$\begin{cases} 0 = N_r \dfrac{di_{dr}}{dt} + g\omega N_r\, i_{qr} + R_r\, i_{dr} \\ \dfrac{MgV_s\sqrt{2}}{L_s} = N_r \dfrac{di_{qr}}{dt} - g\omega N_r\, i_{dr} + R_r\, i_{qr}\,. \end{cases} \tag{12.50}$$

L'expression du couple électromagnétique (11.15) s'écrit, compte tenu de (11.9) et (12.49) :

$$C_e = -\frac{3\,p_1\,MV_s\sqrt{2}}{2\,\omega L_s}\, i_{qr}\,. \tag{12.51}$$

L'équation du mouvement est donnée par (11.16).

Pour simplifier nous supposons un démarrage à couple mécanique nul ($C_m = 0$). Compte tenu de (11.17) il vient :

$$\frac{J\omega}{p_1} \cdot \frac{dg}{dt} = -\frac{3\,p_1\,MV_s\sqrt{2}}{2\,\omega L_s}\, i_{qr}\,. \tag{12.52}$$

L'évolution des diverses grandeurs au cours du temps obéit au système d'équations différentielles (12.50) et (12.52), dont les variables sont g, i_{dr} et i_{qr}.

Ce système, non linéaire et du troisième ordre, n'a pas de solution analytique mais il peut être aisément résolu par voie numérique.

On peut montrer [8] que l'allure de la loi de variation des différentes grandeurs au cours du temps et donc aussi de la caractéristique transitoire couple-glissement,

pour un moteur de caractéristiques électriques (résistances, inductances) données et alimenté à fréquence donnée, ne dépend que d'un seul paramètre K proportionnel au carré de la tension d'alimentation et inversement proportionnel au moment d'inertie des masses tournantes : plus K est petit, plus on se rapproche de la caractéristique (12.15) correspondant au régime stationnaire. Pour K grand, par contre, on s'en écarte comme le montre le graphique de la figure 12.3 : le couple maximal est diminué et le synchronisme peut être dépassé au cours d'oscillations précédant la stabilisation en vitesse. Sur la figure 12.3 où sont portés en abscisses la vitesse Ω_r rapportée à la vitesse de synchronisme ω/p_1 et en ordonnées le couple C_e rapporté au couple nominal C_n, la courbe 1 correspond à la caractéristique couple-vitesse en régime stationnaire, la courbe 2 au démarrage sous tension nominale mais avec un temps d'accélération nominal T_J (6.42) de 1 seconde.

La conséquence pratique de cette étude est qu'au cours de son démarrage, un moteur asynchrone n'est pas nécessairement le siège d'un couple moteur égal à celui que donne la caractéristique « statique » couple-vitesse, mais que si en particulier l'inertie des masses tournantes est faible, à la caractéristique « statique »

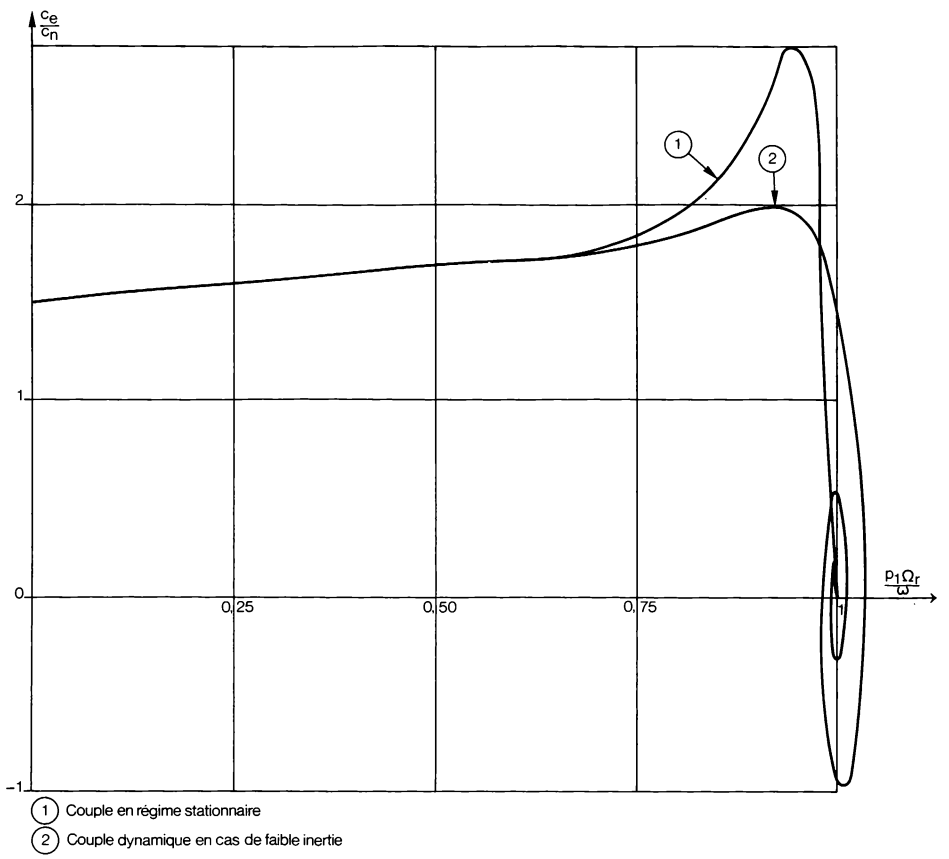


Fig. 12.3. — Influence de l'inertie des masses tournantes sur la caractéristique de démarrage d'un moteur asynchrone.

de montée en vitesse se substitue une caractéristique « dynamique » correspondant à un couple maximal plus faible et éventuellement à des oscillations de vitesse en fin de démarrage, dont l'excursion peut dépasser la vitesse de synchronisme.

3 EXPRESSION CONDENSÉE DES ÉQUATIONS, UTILISANT LES NOMBRES COMPLEXES

Considérons les équations de départ (11.6) à (11.9), écrites dans un référentiel quelconque.

Les symétries évidentes de ces équations suggèrent de les regrouper deux à deux en introduisant des nombres complexes. L'interprétation projective des grandeurs d'axes d et q, qui a été détaillée surtout lors de l'étude des machines synchrones, suggère d'opérer ce regroupement en tenant compte de la disposition relative des axes d et q figure 11.2, ce qui conduit aux deux possibilités préférentielles suivantes, par exemple pour la tension :

$$\mathbf{v}_s = v_{qs} + \mathrm{j}v_{ds} \tag{12.53}$$

ou

$$\mathbf{v}_s = v_{ds} - \mathrm{j}v_{qs} .$$

Nous choisissons d'adopter la première possibilité et posons également :

$$\begin{cases} \mathbf{i}_s = i_{qs} + \mathrm{j}i_{ds} \\ \boldsymbol{\psi}_s = \psi_{qs} + \mathrm{j}\psi_{ds} \\ \mathbf{i}_r = i_{qr} + \mathrm{j}i_{dr} \\ \boldsymbol{\psi}_r = \psi_{qr} + \mathrm{j}\psi_{dr} . \end{cases} \tag{12.54}$$

Nous développons les calculs dans le cas du rotor en court-circuit ($v_{dr} = v_{qr} = 0$), et pour simplifier nous adoptons la notation opérationnelle, consistant à remplacer d/dt par p, sachant que les expressions obtenues ne s'appliquent qu'au régime « superposé » des phénomènes transitoires, et à condition que la vitesse soit constante.

Les équations (11.6) à (11.9) deviennent :

$$\mathbf{v}_s = -p\boldsymbol{\psi}_s - \mathrm{j}\boldsymbol{\psi}_s\, p\theta_s - \mathrm{R}_s\,\mathbf{i}_s \tag{12.55}$$

$$0 = p\boldsymbol{\psi}_r + \mathrm{j}\boldsymbol{\psi}_r\, p\theta_r + \mathrm{R}_r\,\mathbf{i}_r \tag{12.56}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\psi}_s \\ \boldsymbol{\psi}_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{L}_s & \mathrm{M} \\ \mathrm{M} & \mathrm{L}_r \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \end{vmatrix} . \tag{12.57}$$

Ces nombres complexes ne sauraient être confondus avec ceux représentant des grandeurs à variation sinusoïdale : leur loi de variation au cours du temps peut être absolument quelconque, et c'est pourquoi ils sont notés avec des lettres minuscules.

On peut aussi exprimer le couple (11.15) avec cette notation :

$$\mathrm{C}_e = \frac{3\,p_1}{2}\,\Im m\,\{\,\boldsymbol{\psi}_s \mathbf{i}_s^*\,\} . \tag{12.58}$$

A l'aide des relations (12.55) à (12.57), indépendantes du référentiel choisi, on peut expliciter un certain nombre de fonctions de transfert. Donnons en deux exemples :

En éliminant $\boldsymbol{\psi}_r$ et $\mathbf{i}_r$ entre (12.56) et (12.57), on obtient une relation entre $\boldsymbol{\psi}_s$ et $\mathbf{i}_s$:

$$\boldsymbol{\psi}_s = \frac{(L_s L_r - M^2)(p + jp\theta_r) + R_r L_s}{R_r + L_r(p + jp\theta_r)} \mathbf{i}_s .$$

Il est avantageux de faire apparaître dans cette expression :

— l'inductance de fuites totales du stator N_s (12.23)

— les coefficients d'amortissement du rotor, inverses des constantes de temps (12.5) et (12.6) :

$$\beta'_o = \frac{1}{T'_o} = \frac{R_r}{L_r} \qquad \beta' = \frac{1}{T'} = \frac{R_r}{N_r} \tag{12.59}$$

avec d'après (12.29)

$$\frac{\beta'_o}{\beta'} = \frac{T'}{T'_o} = \frac{N_r}{L_r} = \frac{N_s}{L_s}$$

d'où :

$$\boldsymbol{\psi}_s = N_s \frac{p + jp\theta_r + \beta'}{p + jp\theta_r + \beta'_o} \mathbf{i}_s . \tag{12.60}$$

Le quotient $\boldsymbol{\psi}_s/\mathbf{i}_s$ apparaît comme l'inductance opérationnelle vue du stator.

Portant alors dans (12.55), et utilisant (12.24), il vient :

$$\mathbf{v}_s = - N_s \frac{(p + jp\theta_s)(p + jp\theta_r + \beta') + \alpha(p + jp\theta_r + \beta'_o)}{p + jp\theta_r + \beta'_o} \mathbf{i}_s . \tag{12.61}$$

Le quotient $-\mathbf{v}_s/\mathbf{i}_s$ apparaît comme l'impédance opérationnelle vue du stator. Les racines de son numérateur (du second degré en p) caractérisent l'évolution du régime transitoire en cas de variation brusque de la tension aux bornes (court-circuit, enclenchement). La racine du dénominateur caractérise l'évolution du régime transitoire en cas de déclenchement.

Ce modèle n'a pas été utilisé dans les paragraphes précédents du fait qu'on y a traité des exemples particulièrement simples, sachant qu'avec le présent modèle il faut de toutes façons, en fin de calcul, revenir aux composantes d et q. On trouvera en [17] des considérations complémentaires sur cette formulation.

Nous nous contenterons ici de traiter la justification de la simplification qui nous a conduit, au paragraphe 2.2.2, aux équations (12.46). Le cas traité correspond à l'application d'une tension purement d'axe en quadrature à l'arrêt, dans un référentiel lié au champ tournant.

D'après (12.53) $\mathbf{v}_s$ est donc l'échelon correspondant au réel $V_s\sqrt{2}$, donc dans (12.55) il convient de remplacer $\mathbf{v}_s$ par $V_s\sqrt{2}/p$; on y remplace également $\mathbf{i}_s$ par

son expression tirée de (12.60), d'où, en remplaçant également $p\theta_s$ et $p\theta_r$ par ω (machine à l'arrêt et référentiel lié au champ tournant) :

$$\frac{V_s\sqrt{2}}{p} = -\psi_s\left[p + j\omega + \alpha\frac{p + j\omega + \beta'_o}{p + j\omega + \beta'}\right].$$

En réduisant au même dénominateur, et considérant que β'_o et β' sont normalement petits devant ω, on constate que le crochet n'est pratiquement pas modifié si on y remplace β'_o par β', on peut donc l'écrire $p + j\omega + \alpha$, simplification équivalente à celle ayant conduit à (12.46).

4 CONCLUSION

L'isotropie du moteur asynchrone permet, par rapport au cas de la machine synchrone, une plus grande souplesse dans la décomposition selon deux axes ; on peut en effet choisir le référentiel le mieux adapté au problème posé ; le choix se ramène pratiquement à trois référentiels : lié au stator, au rotor, ou au champ tournant. Les principaux problèmes que l'on peut traiter à l'aide de ce modèle mathématique sont :

— d'une part, la détermination des contraintes lors de régimes sévères soit accidentels, par exemple courts-circuits, soit faisant partie du service normal, par exemple le démarrage que nous avons traité rapidement à titre d'exemple, cet exemple nous ayant montré comment mettre en évidence certains phénomènes tels que les surintensités et couples oscillatoires très importants et faisant intervenir la saturation, qui apparaissent au démarrage lors de la mise sous tension, et d'autre part le couple « dynamique », qui diffère du couple en régime stationnaire, lorsque le démarrage est rapide, par un abaissement du couple maximal et un dépassement momentané du synchronisme ;

— d'autre part, les problèmes de réglage, liés notamment à l'association des moteurs asynchrones avec des convertisseurs statiques de fréquence.

NOTE SUR LA RÉGULATION D'EXCITATION

AMÉLIORATION DE LA STABILITÉ D'UN ALTERNATEUR RELIÉ AU RÉSEAU, PAR L'UTILISATION DE CERTAINES BOUCLES D'ASSERVISSEMENT

1 INTRODUCTION

Au chapitre X, paragraphe 4.3, nous avons montré comment une régulation de tension très simple, basée sur l'asservissement de la tension d'excitation e_{vf} à la tension aux bornes v d'un alternateur relié au réseau, par une simple boucle de retour à action proportionnelle, permet d'accroître le domaine de stabilité au-delà de sa limite naturelle. Cette extension du domaine de stabilité peut n'être pas suffisante dans le cas de fonctionnement en antenne sur une ligne très longue, et une nouvelle amélioration peut être apportée par l'asservissement de la tension d'excitation non plus seulement à la tension aux bornes, mais à d'autres grandeurs caractéristiques du régime telles que, par exemple, la vitesse de rotation, la puissance électrique, la puissance mécanique, ...

2 REPRÉSENTATION DE L'ALTERNATEUR ET DE SON RACCORDEMENT

2.1 Schéma de raccordement

Comme au chapitre X, paragraphe 4.3, nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un alternateur raccordé au réseau infini par l'intermédiaire d'une impédance; celle-ci, à prépondérance inductive, prend en compte le transformateur élévateur associé à l'alternateur. Le schéma de principe est donc celui de la figure 10.1.

2.2 Hypothèses simplificatrices et relations traduisant les petites perturbations

Les hypothèses sont exactement les mêmes qu'au chapitre X, paragraphe 4.3, où en particulier on néglige les résistances de l'induit et de la liaison, ainsi que la présence des amortisseurs. Les relations traduisant les petites perturbations peuvent alors être déduites de (10.31) à (10.36) et (10.40) à (10.44), moyennant quelques aménagements et adjonctions qui nous amènent à les réécrire.

Dans les équations électriques, nous supprimons les résistances r_a et r_e ; nous omettons l'indice 0 pour caractériser le régime permanent initial, sachant que seules les grandeurs affectées du symbole Δ sont variables :

$$v_r \cos \delta_e \, \Delta\delta_e = - \Delta v_d + x_e \, \Delta i_q$$

$$v_r \sin \delta_e \, \Delta\delta_e = - \Delta v_q - x_e \, \Delta i_d$$

$$\Delta v_d = - x_q \, \Delta i_q$$

$$\Delta v_q = x_d(p) \, \Delta i_q + f(p) \, \Delta e_{vf}$$

$$x_d(p) = x_d \frac{1 + T'_d \, p}{1 + T'_{do} \, p} \qquad f(p) = \frac{1}{1 + T'_{do} \, p}$$

$$v \, \Delta v = v_d \, \Delta v_d + v_q \, \Delta v_q$$

Les relations électromécaniques (10.35) et (10.36) sont modifiées en remplaçant le couple par la puissance :

$$\Delta p_e = v_d \, \Delta i_d + i_d \, \Delta v_d + v_q \, \Delta i_q + i_q \, \Delta v_q$$

$$\Delta p_m - \Delta p_e = \frac{2}{\omega} \mathrm{H} p \, \Delta\omega_r$$

$$\Delta\omega_r = p \, \Delta\delta_e \, .$$

2.3 Diagramme représentatif des régimes de fonctionnement

Nous nous proposons d'étudier l'influence, sur la stabilité statique, de diverses modalités d'asservissement de la tension d'excitation e_{vf}. Cette influence sera observée classiquement dans le diagramme vectoriel représentatif du régime de l'alternateur, qui peut être transformé en diagramme des puissances actives et réactives par un changement d'échelles. L'influence de la loi de réglage sur la stabilité sera alors traduite par modification du domaine de stabilité, ensemble des valeurs de puissances actives et réactives pour lesquelles le fonctionnement est stable.

Les grandeurs intéressantes étant les paramètres de fonctionnement de l'alternateur, le diagramme vectoriel est tracé en prenant v comme origine du plan complexe, conformément à la figure 1, déduite de la figure 10.2 en annulant r_a et r_e, et où on a en outre fait figurer l'angle $\varphi(\mathbf{i}, \mathbf{v})$.

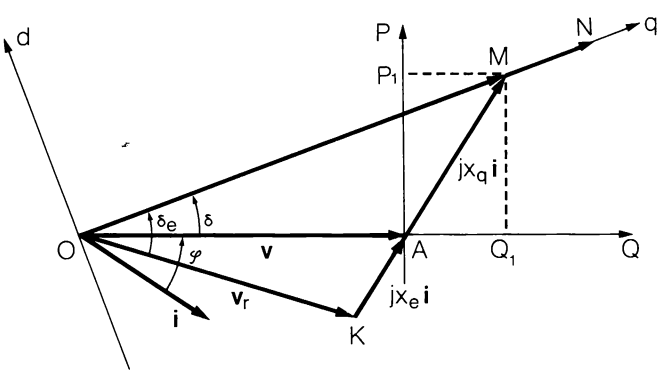


Fig. 1. — Diagramme de fonctionnement de l'alternateur relié au réseau.

Traçant alors les axes horizontal AQ et vertical AP, les projections AP_1 et AQ_1 de M sur AP et AQ valent :

$$AP_1 = x_q\, i \cos \varphi$$
$$AQ_1 = x_q\, i \sin \varphi$$

qui, combinées avec :

$$p_e = vi \cos \varphi$$
$$q_e = vi \sin \varphi$$

puissance active et réactive aux bornes de l'alternateur, donnent :

$$AP_1 = \frac{x_q}{v} p_e$$
$$AQ_1 = \frac{x_q}{v} q_e .$$

Pour rendre le diagramme plus général et mieux exploitable dans le cadre de la présente étude, il est préférable d'effectuer un changement d'échelle conduisant à diviser toutes les longueurs par vx_q.

Le fonctionnement de l'alternateur est alors caractérisé par la position du point M dans le plan xAy de la figure 2, gradué en q_e/v^2 et p_e/v^2. L'abscisse du point O prend alors la valeur $-\frac{1}{x_q}$ et la position du point M peut également être caractérisée par ses coordonnées polaires issues de O, ρ et δ, avec les relations :

$$\rho \cos \delta = \frac{1}{x_q} + \frac{q_e}{v^2}$$

$$\rho \sin \delta = \frac{p_e}{v^2} .$$

L'utilisation des coordonnées ρ et δ entraîne de notables simplifications lorsqu'on explicite les conditions de stabilité dont il sera question plus loin ; en outre la signification physique attachée à l'angle interne δ aide à l'interprétation des résultats du calcul.

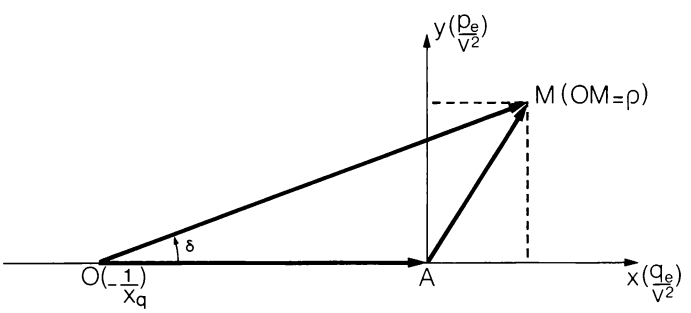


Fig. 2. — Plan de référence pour la représentation des domaines stables.

3 TRANSMITTANCES EN BOUCLE OUVERTE

Nous avons établi ci-dessus au paragraphe 2.2, huit relations linéaires et homogènes entre dix variables en fonction de deux d'entre elles ; nous remarquons d'abord que les transmittances obtenues seront d'ordre 3 — un ordre dû à la présence de l'inducteur, et deux ordres dus à l'équation du mouvement — nous choisissons comme grandeurs d'entrée les paramètres Δe_{vf} et Δp_m. Pour simplifier l'exposé, nous supposons $\Delta p_m = 0$; nous reviendrons plus loin sur cette hypothèse.

En adoptant pour constituer les boucles d'asservissement trois grandeurs de sortie judicieusement choisies, nous allons voir qu'il est possible d'influer avec une assez grande liberté sur les paramètres de la transmittance en boucle fermée. Pour l'illustration de la méthode, nous nous limiterons à ce nombre, bien qu'il soit possible de l'accroître. On a retenu les trois grandeurs Δv, $\Delta\omega_r$ et Δp_e, dont les expressions, en fonction de Δe_{vf}, obtenues à partir du paragraphe 2.2, sont de la forme :

$$\Delta v = \frac{N_1(p)}{D(p)} \Delta e_{vf} \tag{1}$$

$$\Delta\omega_r = \frac{N_2(p)}{D(p)} \Delta e_{vf} \tag{2}$$

$$\Delta p_e = \frac{N_3(p)}{D(p)} \Delta e_{vf} . \tag{3}$$

Le régulateur utilisant des boucles de retour associées à ces seules trois grandeurs, est appelé « régulateur à trois boucles ».

Le dénominateur $D(p)$, commun à toutes les transmittances, est d'ordre trois, donc de la forme :

$$D(p) = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 . \tag{4}$$

Les trois numérateurs, d'ordre inférieur à trois, sont de la forme :

$$N_1(p) = c_0 + c_2 p^2 \tag{5}$$

$$N_2(p) = d_1 p \tag{6}$$

$$N_3(p) = e_2 p^2 . \tag{7}$$

Les coefficients $b_0, b_1, \ldots, e_2$ sont fonction d'une part des paramètres caractérisant l'alternateur et son raccordement au réseau (x_d, x_q, T'_{do}, T'_d, x_e, H) qui figurent dans les relations du paragraphe 2.2, et d'autre part des paramètres caractérisant le régime de fonctionnement (ρ, δ, v). Nous ne donnons pas ici le détail de ces coefficients, qui entraînerait à des développements mathématiques trop longs. Remarquons toutefois d'après (5), (6), (7), que les numérateurs obéissent à des lois en p de nature distincte, ce qui permettra de leur affecter des fonctions spécifiques dans l'optimisation de la chaîne de réglage en boucle fermée : c'est une des raisons qui les a fait choisir plutôt que d'autres grandeurs de sortie possibles.

4 TRANSMITTANCE EN BOUCLE FERMÉE DU RÉGULATEUR A TROIS BOUCLES

Pour simplifier le problème et mieux dégager les critères de stabilité, nous considérons une loi de réglage à action proportionnelle liant la tension d'excitation Δe_{vf} d'une part à la tension de consigne Δu_c, d'autre part aux trois grandeurs retenues pour les boucles de retour, soit :

$$\Delta e_{vf} = k_0\,\Delta u_c - k_1\,\Delta v - k_2\,\Delta\omega_r - k_3\,\Delta p_e\,. \tag{8}$$

Le principe du réglage est schématisé sur la figure 3.

La transmittance en boucle fermée relie la grandeur de sortie Δv à la grandeur d'entrée Δu_c. Elle s'obtient par élimination de Δe_{vf}, $\Delta\omega_r$, Δp_e entre (1), (2), (3) et (8); on trouve immédiatement :

$$\frac{\Delta v}{\Delta u_c} = \frac{k_0\,N_1(p)}{D(p) + k_1\,N_1(p) + k_2\,N_2(p) + k_3\,N_3(p)}$$

soit encore :

$$\frac{\Delta v}{\Delta u_c} = \frac{k_0(c_0 + c_2\,p^2)}{a_0 + a_1\,p + a_2\,p^2 + a_3\,p^3} \tag{9}$$

avec, en utilisant (4), (5), (6), (7) :

$$a_0 = b_0 + k_1\,c_0 \tag{10}$$

$$a_1 = b_1 + k_2\,d_1 \tag{11}$$

$$a_2 = b_2 + k_1\,c_2 + k_3\,e_2 \tag{12}$$

$$a_3 = b_3\,. \tag{13}$$

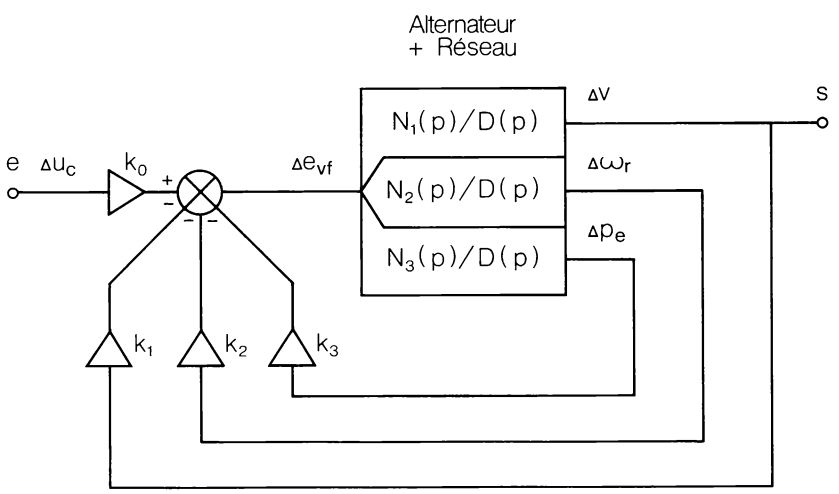


Fig. 3. — Principe du réglage « à trois boucles ».

On voit donc que seule la boucle Δv peut modifier le coefficient a_0, seule la boucle $\Delta\omega_r$ peut modifier a_1, et que la boucle Δp_e ne peut modifier que le coefficient a_2.

5 CONDITIONS DE STABILITÉ

La condition nécessaire et suffisante de stabilité de ROUTH conduit au respect des trois critères suivants — sachant qu'ici a_3 est intrinsèquement positif — :

(14) $$a_0 > 0$$

(15) $$a_2 > 0$$

(16) $$a_1 > \frac{a_0\, a_3}{a_2}.$$

L'optimisation du réglage consiste donc à chercher les valeurs k_1, k_2, k_3 qui permettent aux critères (14) à (16) d'être satisfaits pour le plus grand ensemble de conditions de fonctionnement (ρ, δ) et de raccordement au réseau (x_e).

L'étude analytique de cette optimisation est relativement simple, compte tenu des hypothèses simplificatrices adoptées ; elle permet une interprétation aisée des conséquences des divers choix, par l'observation de l'évolution des limites dans le plan de la figure 2.

Dans le paragraphe suivant, nous allons illustrer ce propos en exposant la démarche faite dans le cas d'un exemple concret.

Signalons auparavant les particularités suivantes relatives aux critères (14), (15), (16) :

— la limite $a_0 = 0$ est une limite de stabilité purement statique : si le régime de fonctionnement évolue de façon très lente jusqu'à atteindre cette limite, le régime diverge sans oscillation (perte de synchronisme) ;

— la limite $a_1 = \frac{a_0\, a_3}{a_2}$ correspond à une instabilité oscillatoire (résonance) ;

— dans le problème étudié ici, les seuls critères $a_0 > 0$ et $a_1 > \frac{a_0\, a_3}{a_2}$ sont à prendre en compte, car *la frontière $a_2 = 0$ se trouve toujours à l'extérieur du domaine autorisé par les deux autres critères.*

6 EXEMPLE D'APPLICATION

6.1 Caractéristiques de l'alternateur et du réseau

La méthode a été appliquée à un turboalternateur de puissance apparente nominale $S_n = 1\,080$ MVA et de facteur de puissance nominal $\cos\varphi_n = 0{,}9$.

Les paramètres utiles à l'étude sont :

$$x_d = 2{,}5$$
$$x_q = 1{,}6$$
$$T'_{do} = 8 \text{ s}$$
$$T'_d = 1{,}6 \text{ s}$$
$$H = 6{,}5 \text{ s}.$$

La valeur de x_q nettement inférieure à x_d bien qu'il s'agisse d'un turboalternateur, est destinée à tenir compte de la forte saturation présentée par ce type de machine dans l'axe en quadrature, et qui se répercute sur la valeur initiale de l'angle interne δ comme on peut le constater sur la figure 1.

Sur les figures 4 et suivantes, tracées dans le même système de coordonnées que figure 2, on a représenté en trait plein le domaine normal de fonctionnement de l'alternateur, afin de pouvoir comparer ce domaine avec celui autorisé théoriquement par les diverses options de réglage.

Ce domaine a été tracé pour la tension nominale aux bornes ($v = 1$). On reconnaît :

— l'horizontale correspondant à la puissance nominale de la turbine $p_e = 0{,}9$

— à droite, la limite d'échauffement rotor, arc de limaçon de Pascal partant du régime nominal $p_e = 0{,}9$, $q_e = 0{,}435$ et se terminant sur l'axe q_e/v^2 au point $q_e/v^2 \simeq 0{,}82$

— à gauche, la limite d'échauffement stator, arc de cercle de rayon 1.

Le souci de limiter l'échauffement des parties frontales du circuit magnétique statorique conduit à restreindre en pratique le domaine dans sa partie gauche. Pour les turboalternateurs de grande puissance, la limite adoptée correspond à la verticale $q_e = -0{,}35$, en trait interrompu sur le diagramme.

Par contre on n'a pas fait figurer la limite de stabilité statique « naturelle », correspondant à l'annulation de (6.58), du fait qu'elle correspond au cas non intéressant ici d'une impédance extérieure nulle.

Enfin, pour le réseau on a choisi une réactance extérieure $x_e = 1$, soit 100 %, ce qui correspond à une situation sévère du point de vue de la stabilité ; on verra par la suite que cette valeur n'est pas très éloignée de la limite supérieure au-delà de laquelle il n'est pas possible d'assurer la stabilité dans tout le domaine normal.

6.2 Choix du coefficient k_1 associé à la boucle tension

On remarque d'après le paragraphe 4 que k_1 est le seul paramètre de réglage susceptible d'influer sur le coefficient a_0, qui caractérise la limite de stabilité statique. La valeur retenue ici est $k_1 = 30$; en effet, d'une part elle correspond sensiblement au minimum autorisé par les spécifications en vue d'assurer des performances suffisantes de maintien de la tension (*) en cas de petites ou grandes perturbations, et d'autre part il n'est pas utile pour la stabilité d'accroître nettement k_1 au-delà de cette valeur. La limite statique — critère $a_0 = 0$ — correspondant à $k_1 = 30$ est tracée sur les figures 4 et suivantes ; c'est une courbe coupant l'axe horizontal au point d'abscisse $1/x_e$, valant 1 ici, et qui pour $k_1 = 30$ tend vers une asymptote de grande pente négative.

Dès ce stade de l'étude, on peut constater une limite supérieure de la réactance x_e au-delà de laquelle il n'est plus possible de stabiliser l'alternateur dans tout le domaine normal, puisque la courbe $a_0 = 0$ se déplace vers la gauche lorsque x_e augmente. On peut estimer à environ 1,2 ou 120 % la limite supérieure de x_e.

Dans la suite de l'étude, on conservera $k_1 = 30$.

(*) Signalons qu'en vue de réduire l'erreur statique, on adopte de préférence $k_0 = k_1$.

6.3 Adjonction d'une boucle puissance : stabilisateur à écart de puissance S.E.P.

Cette mesure de stabilisation a été une des premières envisagées et mises en œuvre lorsqu'on s'est heurté à des problèmes de transport sur longue distance. Elle s'est avérée très efficace pour des distances moyennes; il est intéressant d'observer ici son effet lorsque $x_e = 1$.

Nous reportant au paragraphe 4, nous adoptons $k_1 = 30$, $k_2 = 0$, nous faisons croître k_3 à partir de la valeur 0 et nous examinons les domaines associés aux critères (14) et (16).

L'effet du critère $a_0 > 0$ a déjà été examiné : les régimes à droite de la limite $a_0 = 0$ sont exclus.

On a donc tracé sur la figure 4 les courbes limites correspondant à $a_1 = \dfrac{a_0 a_3}{a_2}$ pour $k_2 = 0$ et diverses valeurs de k_3.

On en tire les constatations suivantes :

— le seul réglage de tension ($k_3 = 0$) ne permettrait un fonctionnement stable que dans un domaine très restreint;

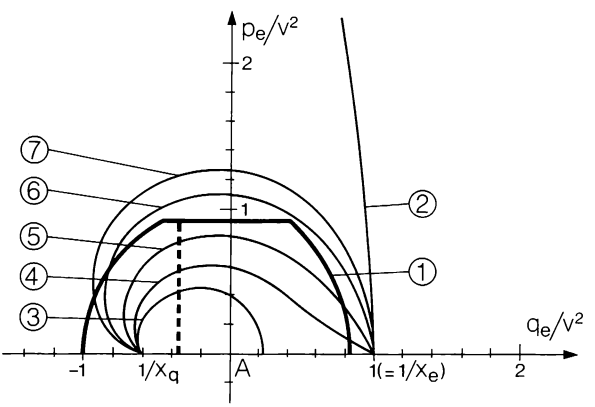


Fig. 4. — Limites de stabilité avec boucles tension et puissance.

1. Frontière du domaine normal
2. Critère $a_0 = 0$ avec $k_1 = 30$
3. Critère $a_1 = \dfrac{a_0 a_3}{a_2}$ avec $k_1 = 30, k_2 = 0, k_3 = 0$
4. Critère $a_1 = \dfrac{a_0 a_3}{a_2}$ avec $k_1 = 30, k_2 = 0, k_3 = 5$
5. Critère $a_1 = \dfrac{a_0 a_3}{a_2}$ avec $k_1 = 30, k_2 = 0, k_3 = 15$
6. Critère $a_1 = \dfrac{a_0 a_3}{a_2}$ avec $k_1 = 30, k_2 = 0, k_3 = 60$
7. Limite statique à flux inducteur constant.

— l'augmentation de k_3 permet d'accroître l'ensemble des régimes possibles jusqu'à englober le domaine normal, par exemple pour $k_3 = 60$, mais au-delà de cette valeur l'amélioration est faible ; on peut montrer que lorsque k_3 tend vers l'infini, la limite du domaine stable tend vers la limite de stabilité statique à flux inducteur constant, dessinée sur la figure. En conséquence, dans le cas présent où $x_e = 1$, le S.E.P. seul ne permet pas d'assurer une marge de stabilité suffisante.

6.4 Influence d'une boucle vitesse

En vue d'examiner l'influence combinée des trois boucles tension, vitesse et puissance électrique, nous examinons maintenant l'influence de k_2 seul, avec $k_3 = 0$, et toujours $k_1 = 30$.

Les limites correspondant à l'égalité $a_1 = \dfrac{a_0 a_3}{a_2}$ sont tracées figure 5 pour deux valeurs de k_2 :

$$k_2 = -6{,}875 \text{ s} \quad \text{et} \quad k_2 = -16{,}5 \text{ s}.$$

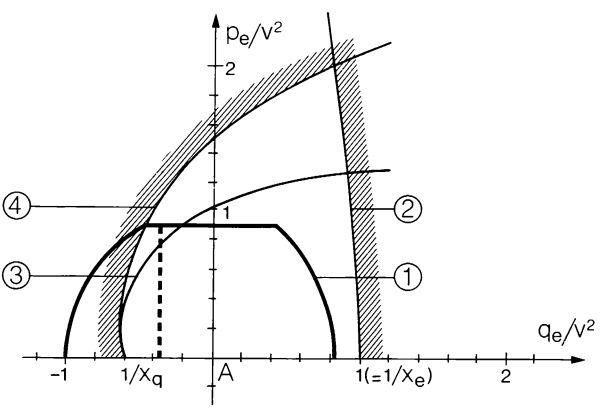


Fig. 5. — Limites de stabilité avec boucles tension et vitesse.

1. Frontière du domaine normal.
2. Critère $a_0 = 0$ avec $k_1 = 30$.
3. Critère $a_1 = \dfrac{a_0 a_3}{a_2}$ avec $k_1 = 30$, $k_3 = 0$, $k_2 = -6{,}875$ s.
4. Critère $a_1 = \dfrac{a_0 a_3}{a_2}$ avec $k_1 = 30$, $k_3 = 0$, $k_2 = -16{,}5$ s.

On constate que lorsque k_2 augmente (en valeur négative), le domaine de stabilité s'étend, surtout pour les régimes avec fourniture de puissance réactive. Le domaine a été cerné de hachures dans le cas $k_2 = -16{,}5$ s.

6.5 Influence combinée d'une boucle vitesse et d'une boucle puissance : régulateur à trois boucles

Adoptant les valeurs $k_2 = -16{,}5$ s et $k_1 = 30$, les limites correspondant à l'égalité $a_1 = \dfrac{a_0 a_3}{a_2}$ sont tracées figure 6 pour trois valeurs de k_3 :

$k_3 = 0$ (l'un des cas précédents), $k_3 = 15$ et $k_3 = 60$.

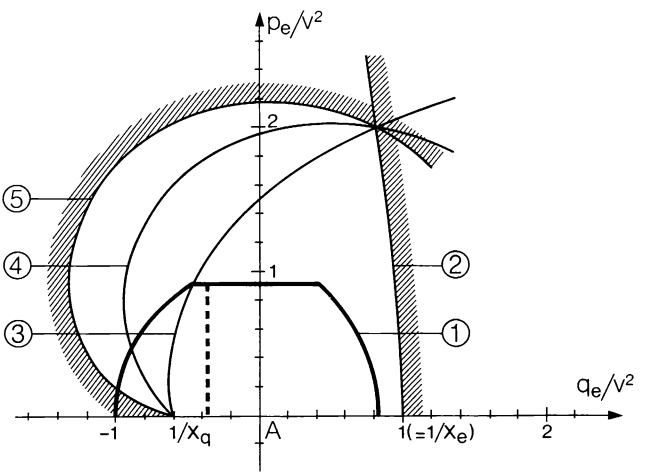


Fig. 6. — Limites de stabilité avec boucles tension, vitesse et puissance.

1. Frontière du domaine normal.
2. Critère $a_0 = 0$ avec $k_1 = 30$.
3. Critère $a_1 = \dfrac{a_0 a_3}{a_2}$ avec $k_1 = 30$, $k_2 = -16{,}5$ s, $k_3 = 0$
4. Critère $a_1 = \dfrac{a_0 a_3}{a_2}$ avec $k_1 = 30$, $k_2 = -16{,}5$ s, $k_3 = 15$.
5. Critère $a_1 = \dfrac{a_0 a_3}{a_2}$ avec $k_1 = 30$, $k_2 = -16{,}5$ s, $k_3 = 60$.

Le domaine de stabilité correspondant à $k_3 = 60$ a été cerné de hachures ; on constate une marge notable de la limite de stabilité par rapport à l'ensemble des régimes correspondant au domaine normal de fonctionnement.

7 CONCLUSION ET COMPLÉMENTS

L'étude qui vient d'être présentée est limitée à l'amélioration de la stabilité statique d'un alternateur, relié au réseau par une longue ligne, grâce à l'utilisation, dans la chaîne de réglage de la tension, de signaux proportionnels à l'écart de

tension aux bornes, de vitesse et de puissance électrique. Par un choix judicieux des coefficients de proportionnalité, on peut assurer la stabilité statique avec une bonne marge de sécurité, pour l'ensemble des fonctionnements normaux de l'alternateur, lorsque la réactance de liaison est égale à 1 en valeur relative. Cette valeur pourrait être portée à 1,2 — mais guère au-delà —; par ailleurs, on a pu vérifier que les paramètres de réglage adaptés à cette situation conviennent aussi pour les situations moins contraignantes — réactance de liaison inférieure — ainsi que lorsque le réseau ne peut plus être considéré comme « infini », le cas limite à cet égard étant le fonctionnement sur charge isolée.

Un certain nombre d'hypothèses simplificatrices ont été adoptées :

On a négligé la saturation et la présence d'amortisseurs, mais on peut estimer que la prise en compte de ces deux facteurs devrait avoir un effet globalement favorable à la stabilité.

La loi de réglage de type proportionnel entre la tension d'excitation e_{vf} et les diverses grandeurs de sortie suppose un temps de réponse du système d'excitation pratiquement négligeable. Cette situation peut être réalisée dans le cas d'excitation par soutirage ; par contre, pour les autres modes d'excitation il y a lieu de vérifier l'influence de la constante de temps du système d'excitation, dont on notera qu'elle n'excède généralement pas 0,2 s.

Les paramètres de réglage obtenus conviennent également pour assurer un bon comportement en stabilité transitoire, à une réserve près cependant : dans la mesure où le groupe turboalternateur est muni d'une régulation de vitesse à réponse rapide, il est souhaitable d'ajouter une quatrième boucle au schéma de la figure 3, asservissant e_{vf} à l'écart de puissance mécanique Δp_m. On est ainsi conduit au « régulateur à quatre boucles ». Le coefficient de pondération associé à Δp_m est, en ordre de grandeur, égal et opposé à celui de Δp_e — ce qui conduit, dans l'équation (8), à remplacer Δp_e par $\Delta p_e - \Delta p_m$. Cette nouvelle loi de réglage ne remet pas en cause les conclusions de l'étude de stabilité statique, dans la mesure où les variations de Δp_m, sous l'action du régulateur de vitesse, n'ont d'amplitude significative qu'à des fréquences relativement basses, éloignées des fréquences propres associées aux limites oscillantes de stabilité statique.

En tout état de cause, on peut estimer que la marge de sécurité illustrée notamment par la figure 6 est suffisamment large pour que les conclusions de l'étude ne soient pas remises en cause par une prise en compte plus fine des diverses particularités évoquées ci-dessus.

Signalons enfin qu'un progrès supplémentaire dans l'amélioration de la stabilité statique et transitoire peut être apporté, si besoin, par l'adoption du « *réglage adaptatif* » dont l'idée de base est de modifier automatiquement les valeurs numériques des paramètres de réglage — tels que par exemple k_1, k_2, k_3 dans l'équation (8) — en fonction du régime de fonctionnement et des conditions de raccordement au réseau.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. E. DOHERTY, C. A. NICKLE. — Synchronous machines IV. *Trans. AIEE*, février 1928, p. 457-492.

[2] R. H. PARK. — Two reaction theory of synchronous machines. *Trans. AIEE*, vol. 48, juillet 1929, p. 716-727.

[3] E. CLARKE. — Circuit Analysis of A. C. power systems. Vol. IV. *Symmetrical and related components*, John Wiley and Sons 1943.

[4] H. S. KIRSCHBAUM. — Transient electrical torques on turbine generators during short-circuits and synchronizing. *Trans. AIEE*, vol. 64, février 1945, p. 65-70.

[5] A. W. RANKIN. — Per unit impedances of synchronous machines. *Trans. AIEE*, vol. 64, août 1945, p. 569-573 et décembre 1945, p. 839-841.

[6] C. CONCORDIA. — *Synchronous machines. Theory and performances*. John Wiley and Sons, 1951.

[7] Y. K. CHING, B. ADKINS. — Transient theory of synchronous generators under unbalanced conditions. *Journal IEE*, vol. 101, Part IV, 1954, p. 166-182.

[8] G. PFAFF, H. JORDAN. — *Dynamische Kennlinien von Drehstromasynchronmotoren* ETZ. A. Bd 83 H. 12 (4-6-1962), p. 388-392.

[9] F. CAHEN. — Electrotechnique Tome 4. *Machines tournantes à courant alternatif*, Gauthier Villars, 1964.

[10] C.E.I. Publication 34.4. — Recommandations pour les machines électriques tournantes. Quatrième partie : *Méthodes pour la détermination à partir d'essais des grandeurs des machines synchrones*, 1967.

[11] C. BARBIER, P. BARRET, G. PIOGER, P. SAPET. — Utilisation des calculatrices numériques pour l'étude de la stabilité des réseaux de transport d'énergie, *R.G.E.*, tome 77, juillet-août 1968, p. 719-736.

[12] G. NASSE. — L'espace vectoriel, domaine de représentation de l'électrotechnique. Seconde partie : la machine synchrone à pôles saillants. *Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches de l'E.D.F.*, Série B, n° 4, 1968, p. 5-38.

[13] I. M. CANAY. — Causes of discrepancies on calculation of rotor quantities and exact equivalent diagrams of the synchronous machine. *Trans. IEEE-PAS*, juillet 1969, p. 1114-1120.

[14] I. M. CANAY. — Schémas équivalents de la machine synchrone pour le calcul des constantes de la roue polaire, dans le cas de phénomènes non stationnaires et de la marche asynchrone. Première partie Turboalternateurs. *Revue B.B.C.* n° 2, 1969, p. 60-71.

[15] I. M. CANAY. — Schémas équivalents de la machine synchrone pour le calcul des grandeurs de la roue polaire en régime transitoire et lors du démarrage asynchrone. Deuxième partie. Machines à pôles saillants. *Revue B.B.C.* n° 3, 1970, p. 135-145.

[16] C.E.I. Publication 34.4.A. — Recommandations pour les machines électriques tournantes. Quatrième partie : *Méthodes non confirmées pour la détermination à partir d'essais des grandeurs des machines synchrones* (premier complément à la publication 34.4), 1972.

[17] V. N. NEDELCU, A. WEBS, B. KULICKE. — *On the application of the circle diagram to the analysis of the asynchronous machine behaviour under operating conditions*. ETZ. A Bd 93 (1972) H 4 p. 226-231.

[18] Y. TAKEDA, B. ADKINS. — Determination of synchronous machines parameters allowing for unequal mutual inductances. *Proc. IEE*, vol. 121, n° 12, décembre 1974, p. 1501-1504.

[19] B. ADKINS, R. G. HARLEY. — *The general theory of alternating current machines*. Chapman and Hall, 1975.

[20] B. TRANNOY, M. BOIDIN, B. DE FORNEL. — Investigation of the transient behaviour of a current fed autopiloted asynchronous induction machine. *Proc. IEE*, vol. 122, n° 10, octobre 1975, p. 1141-1145.

[21] E. POTOLEA. — *Calculul regimurilor de functionare ale sistemelor electroenergetice* (en roumain), Editura Tehnica, Bucuresti, 1977.

[22] I. D. URUSOV, M. M. KAMSHA. — Analytic criteria for successful synchronization of a synchronous motor in asynchronous starting. *Power Engineering USSR*, n° 6, vol. 15, 1977, p. 51-61.

[23] J. P. MEYER. — Possibilité d'amélioration de la stabilité statique d'un alternateur par l'utilisation des grandeurs tension, vitesse et puissance dans la commande de l'excitation. *Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches d'E.D.F.*, Série B, n° 1-2, 1983, p. 31-60.

Dans la même collection :

1. **Chabert (J.).** — *Calcul des courbes de remous,* 1956, épuisé.
2. **Larras (J.).** — *Plages et côtes de sable,* 1958, épuisé.
3. **Valembois (J.).** — *Memento d'hydraulique pratique,* 1958, corrigé et mis à jour, 1963, nouveau tirage 1977, en cours de révision.
4. **Bouvard (M.).** — *Barrages et prises d'eau en rivières,* 1958, 2e édition revue et augmentée, 1960, épuisé.
5. **Ginocchio (R.).** — *Aménagements hydroélectriques,* 1959, épuisé.
6. **Réméniéras (G.).** — *L'hydrologie de l'Ingénieur,* 1960, 2e éd. revue et augmentée, 1965, nouveaux tirages 1976, 1980, 1986.
7. **Lencastre (A.).** — *Manuel d'hydraulique générale,* 1961, nouveau tirage 1976.
8. *La Mécanique des fluides et la magnétohydrodynamique,* 1962.
9. **Ailleret (P.).** — *Energétique. Les besoins d'énergie,* 1963, nouveau tirage 1974.
10. **Condoyannis (G.).** — *Le Russe scientifique,* 1964 (en vente chez Ophrys).
11. **Larras (J.).** — *Embouchures, estuaires, lagunes et deltas,* 1965, épuisé.
12. **Schneebeli (G.).** — *Hydraulique souterraine,* 1966, nouveau tirage 1978, en réimpression.
13. **Idel'cik (I.E.).** — *Memento des pertes de charge,* 1969, nouveaux tirages 1978, 1986.
14. **Carlier (M.).** — *Hydraulique générale et appliquée,* 1972, nouveaux tirages 1980, 1986.
15. **Larras (J.).** — *Hydraulique et granulats,* 1972.
16. **Thérond (R.).** — *Recherche sur l'étanchéité des lacs de barrage en pays karstique,* 1973.
17. *Aéro-Hydro-Elasticité.* (Cycle de conférences CEA-EDF, septembre 1972), 1973.
18. **Lebreton (J.C.).** — *Dynamique fluviale,* 1974.
19. **Jamme (G.).** — *Travaux fluviaux,* 1974.
20. **Chambadal (P.).** — *La thermodynamique,* 1974.
21. *Techniques de mesure dans les écoulements.* (Cycle de conférences CEA-EDF, septembre 1973), 1974.
22. **Ishii (M.).** — *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow,* 1975.
23. **André (H.), Audinet (M.), Mazeran (G.), Richer (C.).** — *Hydrométrie pratique des cours d'eau,* 1976.
24. **Gary (C.), Moreau (M.).** — *L'effet de couronne en tension alternative,* 1976.
25. **Bonnin (J.).** — *Hydraulique urbaine appliquée aux agglomérations de petite et moyenne importance,* 1977, nouveau tirage 1986.
26. **Chambadal (P.).** — *La turbine à gaz,* 1976.
27. *Nouveaux systèmes énergétiques : cycles thermodynamiques associés* (Cycle de conférences CEA-EDF, septembre-octobre 1974), 1976.
28. *Les sources froides des centrales électriques.* (Cycle de conférences CEA-EDF, octobre 1975), 1977.

29. **Maurel (E.), Roux (D.), Dupont (D.).** — *Techniques opérationnelles d'ordonnancement,* 1977.
30. **Chouard (Ph.), Michel (H.), Simon (M.F.).** — *Bilan thermique d'une maison solaire,* 1977.
31. **Valid (R.).** — *La mécanique des milieux continus et le calcul des structures,* 1977.
32. *Phénomènes thermiques et hydrauliques non stationnaires.* (Cycle de conférences CEA-EDF, octobre 1976), 1978.
33. **Ginocchio (R.).** — *L'énergie hydraulique,* 1978.
34. **Meyer (B.), Baudoin (C.).** — *Méthodes de programmation,* 1978, nouveau tirage 1980, 3e édition revue et corrigée 1984, nouveau tirage 1986.
35. **Bidard (R.), Bonnin (J.).** — *Energétique et turbomachines,* 1979.
36. **Larras (J.).** — *Physique de la houle et des lames,* 1979.
37. **Gondran (M.), Minoux (M.).** — *Graphes et algorithmes,* 1979, 2e édition, revue et complétée, 1985.
38. *Energie électrique et environnement,* 1980. (Publié sous la direction de R. Ginocchio).
39. **Pagès (A.), Gondran (M.).** — *Fiabilité des systèmes,* 1980.
40. **Raviart (P.A.).** — *Les méthodes d'éléments finis en mécanique des fluides* (Ecole d'été d'analyse numérique, CEA-EDF-INRIA, juillet 1979), 1981.
41. *La réalisation des logiciels graphiques interactifs* (Ecole d'été d'informatique, CEA-EDF-INRIA, juillet 1979), 1981, réimpression en 1985.
42. **Bonnin (J.).** — *Aide-mémoire d'hydraulique urbaine,* 1982.
43. **Ailleret (P.).** — *Essai de théorie de la normalisation,* 1982.
44. **Arrighi (R.).** — *Evolution des disjoncteurs à haute et moyenne tensions,* 1983.
45. **Reynaud (J.F.).** — *Concentration par évaporation et recompression mécanique de vapeur,* 1984.
46. **Liénart (P.), François (P.).** — *Acoustique industrielle et environnement. I. Eléments fondamentaux d'acoustique physique et perceptive.* (Monographie publiée sous les auspices du Groupement des acousticiens de langue française), 1983.
47. **Bonnin (J.).** — *L'eau dans l'antiquité : l'hydraulique avant notre ère,* 1984.
48. **Duderstadt (J. J.), Lewis (E.E.), Bardos (C.).** — *Neutron transport equation* (Ecole d'été d'analyse numérique, CEA-EDF-INRIA, 1981), en anglais, 1983.
49. **Golub (G. H.), Meurant (G. A.).** — *Résolution numérique des grands systèmes linéaires* (Ecole d'été d'analyse numérique, CEA-EDF-INRIA, 1980), 1983.
50. **Persoz (H.), Santucci (G.), Lemoine (J. C.), Sapet (P.).** — *La planification des réseaux électriques,* 1984.
51. **Le Roy (G.), Gary (C.), Hutzler (B.), Lalot (J.), Dubanton (C.).** — *Les propriétés diélectriques de l'air et les très hautes tensions,* 1984.
52. **SOGREAH, Laboratoire National d'Hydraulique.** — *Catalogue sédimentologique des côtes françaises, côtes de la Méditerranée* (ouvrage publié sous les auspices du Secrétariat d'Etat auprès du Ministre des Transports, chargé de la mer), 1984.

53. **Miquel (J.).** — *Guide pratique d'estimation des probabilités de crues,* 1984.
54. **Bouvard (M.).** — ***Barrages mobiles et ouvrages de dérivation, à partir de rivières transportant des matériaux solides*** (En collaboration avec la Section d'Hydraulique Fluviale de l'A.I.R.H.), 1984.
55. **Mathieu (J.), Jeandel (D.).** — ***La simulation des modèles de turbulence et leurs applications, Volume 1*** (Ecole d'été d'analyse numérique, C.E.A.-E.D.F.-INRIA, juillet 1982), 1984.
56. **Launder (B. E.), Reynolds (W. C.), Rodi (W.).** — ***La simulation des modèles de turbulence et leurs applications, Volume 2*** (Ecole d'été d'analyse numérique, C.E.A.-E.D.F.-INRIA, juillet 1982), 1984.
57. **Bergman (D.), Lions (J.L.), Papanicolaou (G.), Murat (F.), Sanchez-Palencia (E.), Tartar (L.).** — ***Les méthodes de l'homogénéisation : théorie et applications en physique*** (Ecole d'été d'analyse numérique, C.E.A.-INRIA-E.D.F., juillet 1983), 1985.
58. **Cormary (Y.), Nicolas (C.).** — ***La thermique des serres,*** 1985.
59. **Borghi (R.), Clavin (P.), Liñán (A.), Pelcé (P.), Sivashinsky (G.I.).** — ***Modélisation des phénomènes de combustion*** (École d'été sur les problèmes non linéaires appliquées, C.E.A.-INRIA-E.D.F., décembre 1982), 1985.
60. ***Fortran 77. Guide pour l'écriture de programmes portables,*** ouvrage réalisé sous la direction de Ficheux-Vapné (F.), 1985.
61. **Laboratoire Central d'Hydraulique de France, Laboratoire National d'Hydraulique.** — ***Catalogue sédimentologique des côtes françaises, de la frontière belge au Mont-Saint-Michel*** (ouvrage publié sous les auspices du Secrétariat d'État auprès du Ministre de l'Urbanisme, du Logement et des Transports, chargé de la mer), 1986.
62. **Biau (D.).** — *Les applications industrielles du chauffage par rayonnement infrarouge,* 1986.
63. **Fournié (R.).** — *Les isolants en électrotechnique. Concepts et théories,* 1986.
64. **Bernier (J.), Chaloin (B.), Coeffé (Y.), Feuillet (J.).** — *Le dimensionnement des digues à talus,* 1987.

ESE 1. **Roubine (E.).** — ***Distributions-Signal,*** 1982.
ESE 2. **Barret (P.).** — ***Régimes transitoires des machines tournantes électriques,*** 1982, 2e édition revue et corrigée, 1987.
ESE 3. **Dattée (F.).** — ***Electronique. Concepts de base*** (avec la collaboration de D. Venot), 1983.
ESE 4. **Mésa (F.).** — ***Méthodes d'études des circuits électriques,*** 1985.

Dans les publications de cette collection, la Direction des Etudes et recherches d'Electricité de France laisse aux auteurs la liberté d'exprimer leur point de vue personnel sur les sujets traités.

Imprimé en France. — JOUVE, 18, rue Saint-Denis, 75001 PARIS
N° 16577. Dépôt légal : Février 1987

1574

ISSN 0399-4198